"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

El invariante de Dixmier-Douady en la teoría de haces de álgebras C^* y de haces principales

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Julio Leyva

Director de Tesis: Dr. Jesús F. Espinoza

Hermosillo, Sonora, México, 10 de septiembre de 2015

SINODALES

Dr. Avendaño Camacho Misael
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Bárcenas Torres Noé
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, Morelia, México.

Dr. Espinoza Jesús F.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Ramos Figueroa Rafael
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Índice general

Introducción

En este trabajo realizamos un estudio detallado de la geometría y estructura de haces de Banach y de haces de Hilbert (en dimensión infinita). Posteriormente mostramos un resultado de Carey-Crowley-Murray (CCM) publicado en 1997, en el cual establecen que si el grupo estructural G, de un haz vectorial (P, M, G), es 1-conexo, entonces la clase de Dixmier-Douady es una obstrucción al levantamiento de haces principales sobre una extensión central de grupos de Lie compactos. Para conseguir esto estudiaremos determinadas herramientas, a saber, haces de espacios de Hilbert, álgebras C^*, entre otras, las cuales detallaremos en los siguientes párrafos.

En el primer capítulo estudiaremos la teoría general de haces de espacios de Hilbert, a los que llamaremos haces de Hilbert, los cuales comenzamos definiendo como una pareja

$$\mathscr{H} = \left(\left(\mathcal{H} \left(z \right) \right)_{z \in B}, \Gamma \right),$$

donde $\mathcal{H}(z)$ son las fibras del haz y Γ su conjunto de secciones, el cual es un submódulo de $\mathcal{C}(B)$, el módulo de las funciones continuas $B \to \mathbb{C}$. Posteriormente, introducimos el concepto de homomorfismo de haces, consideramos haces de Banach (Hilbert) $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, y definimos el homomorfismo $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ como homomorfismos fibra a fibra, es decir, $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ es un homomorfismo, de esta manera definimos $\varphi := (\varphi_z)_{z \in B}$.

Así mismo veremos los teoremas de trivialidad:

Primer Teorema de Trivialidad (Teorema 1.2.1):
Sea $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert sobre B de rango infinito. Sí $\mathcal{E}$ es localmente trivial y B es paracompacto, entonces $\mathcal{E}$ es trivial.

Segundo Teorema de Trivialidad (Teorema 1.2.3):
Sea $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert sobre B separable y de rango infinito. Sea $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados tales que $B_i \subset B_j$ si $i < j$, y además

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = B.$$

Supongamos que $\mathcal{E}$ es trivial sobre B_1, $B_2 \setminus B_1$, $B_3 \setminus B_2, \cdots$ Entonces $\mathcal{E}$ es trivial.

Tercer Teorema de Trivialidad (Teorema 1.2.5):
Sea $\mathcal{E}$ un haz separable de Hilbert sobre B de rango infinito. Si B es paracompacto y de dimensión finita.

En el capítulo 2 introducimos el concepto de álgebra C^* (elemental), un tipo especial de álgebra de Banach. Posteriormente definimos los haces de álgebras C^* (elementales) los culaes son, básicamente, una pareja

$$\mathcal{A} = \left(\left(A \left(z \right) \right)_{z \in B}, \Theta \right),$$

donde cada $A(z)$ es un álgebra C^* (elemental) y Θ, su conjunto de secciones, es un álgebra involutiva, es decir, un Θ es un álgebra compleja con un función que cumple ciertas propiedades llamada involución, tal y como se detalla en Definición 2.1.1. Una vez que tenemos el concepto de haces de álgebras C^* (elemtales) procedemos a estudiar las relaciones, locales y globales, entre estos nuevos haces y los haces de Hilbert, por ejemplo, los Teoremas 2.4.2 y 2.4.3 que son resultados locales, mietras que los Teoremas 2.5.1 y 2.6.1 son resultados globales. Finalizamos el capítulo estudiando la existencia de haces localmente triviales.

Finalemente en el capítulo 3, introducimos los conceptos de transgresión, la cual definimos mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & H^3\left(B,\{b_0\};R\right) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\pi^*"] & H^3\left(B;R\right) \\ H^2\left(F;R\right) \arrow[r, "\delta"] & H^3\left(E,F;R\right) & \end{tikzcd}$$

y a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \tau: & H^2\left(F;R\right) & \to & H^3\left(B;R\right) \\ & u & \mapsto & \left(j^*\left(\pi^*\right)^{-1}\delta\right)(u) \end{array}$$

que cumple que para $u \in H^2\left(F;R\right)$ se tiene que

$$\delta\left(u\right) \in \pi^*\left(H^3\left(B,\{b_0\};R\right)\right)$$

la llamamos la **transgresión**. Posteriormente introducimos la clase de obstrucción y la clase de Dixmier-Douady, y concluímos viendo que si el grupo estructural G es 1-conexo, entonces la clase de obstrucción coincide con el negativo de la clase de Dixmier-Douady.

Capítulo 1

Haces de espacios de Hilbert

1.1. Haces de espacios de Banach

1.1.1. Subconjuntos totales

Recordemos que un espacio de Banach V es un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$ con una norma $\|\cdot\|_V$ y que es completo con respecto a esta norma, i. e., para toda sucesión de Cauchy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en V, existe un $v \in V$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_V = 0.$$

Consideremos un espacio topológico B, denotemos por $\mathcal{C}(B)$ el módulo de las funciones continuas $f : B \to \mathbb{C}$. Al espacio B le llamaremos espacio base. Sea $(E(z))_{z\in B}$ una familia de espacios de Banach complejos. Llamaremos sección a todo elemento de $\prod_{z\in B} E(z)$, es decir, una función $s : B \to \prod_{z\in B} E(z)$ tal que $s(z) \in E(z)$ para todo $z \in B$. Si s es una sección, notemos que $\|s\|$ la función $z \mapsto \|s(z)\|$ definida en B toma valores en $\mathbb{R}$. Más generalmente, si $Y \subset B$, llamamos sección de Y a los elementos de $\prod_{z\in Y} E(z)$.

Definición 1.1.1. *Sea B un espacio topológico. Un haz continuo $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ de espacios de Banach sobre B es una familia $(E(z))_{z\in B}$ con un conjunto $\Gamma \subset \prod_{z\in B} E(z)$ de secciones tal que:*

H.1. Γ *es un $\mathcal{C}(B)$-submódulo de $\prod_{z\in B} E(z)$;*

H.2. *para todo $z \in B$ y todo $\xi \in E(z)$, existe $s \in \Gamma$ tal que $s(z) = \xi$;*

H.3. *para todo $s \in \Gamma$, la función $\|s\|$ es continua;*

H.4. *sea $s \in \prod_{z\in B} E(z)$ una sección, si para todo $z \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $s' \in \Gamma$ tal que $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z, entonces $s \in \Gamma$.*

A los elementos de Γ los llamamos secciones continuas de $\mathcal{E}$.

Consideremos las condiciones siguientes:

H'.1. Γ es un subespacio vectorial complejo de $\prod_{z\in B} E(z)$;

H'.2. para todo $z \in B$, el conjunto de los $(s(z))_{s\in\Gamma}$ es denso en $E(z)$;

H'.4. sea $s \in \prod_{z \in B} E(z)$ una sección; si para todo $s' \in \Gamma$, la función $\|s - s'\|$ es continua, entonces $s \in \Gamma$.

Veremos que, en la Definición 1.1.1, podemos reemplazar H.4, por H'.4. Posteriormente veremos que podemos hacer lo mismo con los axiomas H.1 y H.2.

Sean $Y \subset B$ y $z_0 \in Y$. Una sección s en Y es continua en z_0 si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $s' \in \Gamma$ tal que $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z_0. Las secciones, así definidas, sobre Y continuas en z_0 definen un módulo sobre el anillo de las funciones $f : Y \to \mathbb{C}$ continuas en z_0. Más generalmente, una sección s definida sobre B es continua si y sólo si, s es continua en cada punto de B.

Ejemplo 1. *Sean E un espacio de Banach y $\Gamma = \{f : B \to E : f \text{ es continua}\}$. Para todo $z \in B$, denotemos $E(z) = E$. Entonces, $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z \in B}, \Gamma\right)$ es un haz de espacios de Banach sobre B definido por E.*

Definición 1.1.2. *Sea $((E(z)), \Gamma)$ un haz de espacios de Banach sobre B. Diremos que $\Lambda \subset \Gamma$ es **total** si, para todo $z \in B$, el conjunto $\Lambda(z) = (s(z))_{s \in \Lambda}$, el espacio vectorial generado por $\Lambda(z)$ es denso en $E(z)$.*

Proposición 1. *Sea $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de espacios de Banach sobre B. Sean $\Lambda \subset \Gamma$ un subconjunto total y $\langle \Lambda \rangle$ el espacio vectorial complejo generado por Λ. Para una sección $s \in \prod_{z \in B} E(z)$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$s \in \Gamma$;*

2. *para todo $z \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $s' \in \Gamma$ tal que $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z;*

2'. *para todo $z \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $s' \in \langle \Lambda \rangle$ tal que $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z;*

3. *para todo $s' \in \Gamma$, la función $\|s - s'\|$ es continua;*

3'. *para todo $s' \in \langle \Lambda \rangle$, la función $\|s - s'\|$ es continua.*

Demostración.

Las cadena de implicaciones (1)⇒(3)⇒(3') es evidente, de igual manera, (2')⇒(2) también es evidente. La implicación (2)⇒(1) es el condición H.4. Sólo resta verificar (3')⇒(2'). Supongamos que se cumple (3'); sean $z \in B$ y $\varepsilon > 0$; como $\langle \Lambda \rangle (z)$ es denso en $E(z)$, existe $s' \in \langle \Lambda \rangle$ tal que $\|s(z) - s'(z)\| < \varepsilon$. Entonces la función $\|s - s'\|$ es continua, luego $\|s - s'\| < \varepsilon$ se da en una vecindad de z. ■

Consideremos las hipótesis de la Proposición 1, y supongamos que B es localmente compacto. Sean $s \in \Gamma$, $K \subset B$, compacto, y $\varepsilon > 0$. Existen $s_1, \ldots, s_n \in \Lambda$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(B)$ con soporte compacto, tales que $\|s - f_1 s_1 - \ldots - f_n s_n\| \leq \varepsilon$ en K. En efecto, por la Proposición 1, existe una cubierta abierta $\{V_1, \ldots V_p\}$ de K y de elementos $s'_1, \ldots, s'_p$ de $\langle \Lambda \rangle$ tales que $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en V_i y tales que $\overline{V}_i$ son compactos. Sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_{p+1}\}$ una partición continua de la unidad subordinada a $\{V_1, \ldots, V_p, B \setminus K\}$. Por lo tanto, $\|s - \eta_1 s'_1 - \ldots - \eta_p s'_p\| \leq \varepsilon$ sobre todo K.

Proposición 2. *Sean B un espacio topológico, y $(E(z))_{z\in B}$ una familia de espacios de Banach. Sea $\Lambda \subset \prod_{z\in B} E(z)$ un subespacio vectorial complejo. Supongamos que:*

(T.1). *para todo $z \in B$, el conjunto $\Lambda(z) = (s(z))_{s\in\Lambda}$ es denso en $E(z)$;*

(T.2). *para todo $s \in \Lambda$, la función $\|s\|$ es continua.*

Entonces existe un único subconjunto $\Gamma \subset \prod_{z\in B} E(z)$ que satisface las condiciones H.1 *a* H.4*, y es tal que $\Lambda \subset \Gamma$, a saber, el conjunto de secciones s que cumplen la condición* 2' *de la Proposición 1. Si además suponemos que se cumple* H.4*, entonces $\Gamma = \Lambda$.*

Demostración. En efecto, la unicidad se sigue de la Proposición 1 si Γ existe, los elementos de Γ son caracterizados por propiedad (2'). Consideremos el conjunto Γ de las secciones que cumplen (2'). Observemos que, sí $s \in \Gamma$, entonces s cumple (3'): en efecto, sea $s' \in \langle\Lambda\rangle = \Lambda$, para todo $z_0 \in B$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $s'' \in \Lambda$ tal que $\|s'' - s'\| \leq \varepsilon/3$ en una vecindad de z_0. La función $\|s'' - s'\|$ es continua, tenemos que para z en una vecindad de z_0:

$$\left| \|s''(z) - s'(z)\| - \|s''(z_0) - s'(z_0)\| \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos:

$$\left| \|s(z) - s'(z)\| - \|s(z_0) - s'(z_0)\| \right| \leq \varepsilon,$$

en una vecindad de z_0.

Ahora veamos que Γ cumple las condiciones H.1 a H.4.

Condición H.1: sean $s, t \in \Gamma$; para $z_0 \in B$ y para $\varepsilon > 0$, $\|s(z) - s'(z_0)\| \leq \varepsilon/2$ y $\|t(z) - t'(z_0)\| \leq \varepsilon/2$, $s', t' \in \Lambda$; de esta manera $\|(s+t)(z) - (s'+t')(z_0)\| \leq \varepsilon$, por lo tanto $s + t \in \Gamma$.

Si $s \in \Gamma$ y $f \in \mathcal{C}(B)$, entonces $fs \in \Gamma$. En efecto, sean $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$. Existe $s' \in \Lambda$ tal que:

$$\|s - s'\| \leq \text{ínf}\left(\frac{\varepsilon}{2|f(z_0)|}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

en una vecindad de z_0; por otro lado,

$$|f - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|s'(z_0)\|) + 1}$$

en una vecindad de z_0. Entonces

$$\begin{aligned}
\|fs - f(z_0)s'\| &= \|(f - f(z_0))s + f(z_0)\left(s - s'\right)\| \\
&\leq \|(f - f(z_0))s\| + \|f(z_0)\left(s - s'\right)\| \\
&\leq |f - f(z_0)|\|s\| + |f(z_0)|\|s - s'\| \\
&\leq \frac{\|s\|\varepsilon}{2(\|s'(z_0) + 1\|)} + \frac{|f(z_0)|\varepsilon}{2|f(z_0)|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Condición H.2: Para todo $z \in B$, $\Lambda(z) \subset \Gamma(z)$ es denso en $E(z)$. Mostraremos que $\Lambda(z)$ es completo, y como toda familia (ξ_i) de elementos de $\Gamma(z)$ son tales que $\sum \|\xi_i\| < +\infty$ es sumable en $\Gamma(z)$. Sea

$$s_i' = \left[\sup\left(1, \frac{\|s_i\|}{\|\xi_i\|}\right)\right]^{-1} s_i,$$

entonces $s_i' \in \Gamma$, $\|s_i'\| \leq \|\xi_i\|$, y $s_i'(z) = \xi_i$. La familia (s_i') es normalmente sumable, i. e., la suma $\sum \|s_i'\|$ es convergente, y para alguna sección s los $E'(z)$ son completos. Luego, si tomamos $s \in \Gamma$, entonces para $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$, existe una suma parcial finita $s' = \sum_{i \in J} s_i'$ tal que $\|s(z) - s'(z)\| \leq \varepsilon/2$ para $z \in B$; pero $\|s'(z) - s''(z_0)\| \leq \varepsilon/2$ para una vecindad de z_0 y $s'' \in \Lambda$. Por lo tanto, $s \in \Gamma$ y $s(z)$ es suma de la familia (ξ_i).

La condición H.3 es un caso particular de la propiedad (3').

La condición H.4 resulta de la construccíon de Γ. ∎

Observación 1.1.1. *Sea $((E(z)), \Gamma)$ un haz continuo de espacios de Banach sobre B. Sean $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma$ y $z_0 \in B$. Si $\{s_1(z_0), \ldots, s_n(z_0)\}$ es linealmente independiente, entonces $\{s_1(z), \ldots, s_n(z)\}$ es linealmente independiente para cada z en una vecindad de z_0. En efecto, si para cada $z \in B$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, denotamos*

$$\alpha(z, c_1, \ldots, c_n) = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i s_i(z) \right\|$$

y

$$\beta(z) = \inf_{\sum \|c_i\|^2 = 1} \alpha(z, c_1, \ldots, c_n),$$

entonces α es una función continua en $B \times \mathbb{C}^n$. Por lo tanto, β es una función continua sobre B, pues la esfera unitaria de $\mathbb{C}^n$ es compacta. Luego $\{s_1(z), \ldots, s_n(z)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\beta(z) > 0$.

Recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es semicontinua inferiormente en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U de x_0 tal que $f(z) \geq f(x_0) - \varepsilon$ para todo x en U cuando $f(x_0) < +\infty$. Así, tenemos que la función que a todo $z \in B$ le asocia la dimensión, finita o infinita de $E(z)$, es semicontinua inferiormente.

Como nota final, llamaremos a un haz de espacios de Banach (Hilbert) haz de Banach (Hilbert).

1.1.2. El espacio total asociado a un haz

A partir de aquí todos los haces que consideremos serán continuos.

Sea $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z \in B}, \Gamma\right)$ un haz de Banach sobre B. Sea $E = \prod_{z \in B} E(z)$ con la topología producto. Sea $\pi : E \to B$ la proyección canónica, entonces $\pi^{-1}(z) = E(z)$. Para todo conjunto abierto Y de B, para todo $s \in \Gamma$ y todo $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto

$$T(Y, s, \varepsilon) = \{\xi \in E : \pi(\xi) \in Y \quad \text{y} \quad \|\xi - s(\pi(\xi))\| \leq \varepsilon\}.$$

Diremos que $T(Y,s,\varepsilon)$ es el tubo o vecindad tubular de Y definido para s y para ε. Si $T(Y,s,\varepsilon)$ y $T(Y_1,s_1,\varepsilon_1)$ son dos tubos, entonces $T(Y,s,\varepsilon)\cap T(Y_1,s_1,\varepsilon_1)$ es la unión de tubos. En efecto, sean $\xi\in T(Y,s,\varepsilon)\cap T(Y_1,s_1,\varepsilon_1)$ y $z_0=\pi(\xi)$; entonces

$$\|\xi - s(z_0)\| < \varepsilon, \quad \|\xi - s_1(z_0)\| < \varepsilon_1;$$

sea

$$0<\varepsilon_2<\text{ínf}\left(\varepsilon - \|\xi - s(z_0)\|, \varepsilon_1 - \|\xi - s_1(z_0)\|\right);$$

entonces existe $s_2\in\Gamma$ tal que $\xi = s_2(z_0)$, y una vecindad abierta $Y_2\subset Y\cap Y_1$ de z_0 tal que

$$\|s_2(z)-s(z)\| < \varepsilon_2 + \|\xi - s(z_0)\| \text{ y } \|s_2(z)-s_1(z)\| < \varepsilon_2 + \|\xi - s_1(z_0)\|$$

para todo $z\in Y_2$; se sigue que $T(Y_2,s_2,\varepsilon_2)\subset T(Y,s,\varepsilon)\cap T(Y_1,s_1,\varepsilon_1)$, y por otro lado, $\xi\in T(Y_2,s_2,\varepsilon_2)$, esto prueba nuestra afirmación.

Proposición 3. *La topología inducida por $\mathcal{T}$ en $E(z)$ coincide con la topología fuerte de $E(z)$.*

Demostración. Para todo tubo $T(Y,s,\varepsilon)$, tenemos que $T(Y,s,\varepsilon)\cap E(z)$ es una bola abierta de $E(z)$. Por otro lado, sea $\xi\in E(z)$ y $\beta = B(\xi,\varepsilon)$ una bola en $E(z)$; sea $s\in\Gamma$ tal que $s(z)=\xi$; entonces $T(B,s,\varepsilon)\cap E(z)=\beta$; por lo tanto, todo conjunto abierto de $E(z)$ en la topología fuerte (fuertemente abierto) es unión de conjuntos de la forma $T(B,s,\varepsilon)\cap E(z)$. ■

Todo elemento $s\in\Gamma$ lo podemos identificar con una aplicación $s:B\to E$ tal que $\pi\circ s = id_B$. Más aún, la aplicación $s:B\to E$ es continua si, y sólo si $s\in\Gamma$. Efectivamente, supongamos que $s:B\to E$ es una aplicación continua. Sean $z_0\in B$ y $\varepsilon>0$. Existe $t\in\Gamma$ tal que $s(z_0)=t(z_0)$. Luego, $s(z_0)\in T(B,t,\varepsilon)$, por lo tanto $s(z)\in T(B,t,\varepsilon)$ para z en una vecindad de z_0, i. e., $\|s(z)-t(z)\|<\varepsilon$ en una vecindad de z_0, esto prueba que $s\in\Gamma$.

Recíprocamente, supongamos que $s\in\Gamma$. Sean $z_0\in B$ y $T(Y,t,\varepsilon)$ un tubo que contiene a $s(z_0)$. Luego, $\|s(z_0)-t(z_0)\|<\varepsilon$, por lo tanto $\|s(z)-t(z)\|<\varepsilon$ para z en una vecindad de z_0, así $s(z)\in T(Y,t,\varepsilon)$ para z en una vecindad de z_0, en consecuencia, $s:B\to E$ es continua.

Observación 1.1.2. *Observemos que si $\Lambda\subset\Gamma$ es tal que $\Lambda(z)$ es denso en $E(z)$ para todo $z\in B$, entonces las vecindades tubulares $T(Y,s,\varepsilon)$ forman una base para la topología de E.*

Sea $A=\{(\xi,\xi')\in E\times E:\pi(\xi)=\pi(\xi')\}$. La aplicación $\phi:A\to E$ tal que $(\xi,\xi')\mapsto\xi+\xi'$, es continua. De igual manera la aplicación $\varphi:\mathbb{C}\times E\to E$ tal que $(\lambda,\xi)\mapsto\lambda\xi$ es continua. Y finalmente, la aplicación $\psi:E\to\mathbb{R}$ tal que $\xi\mapsto\|\xi\|$ es continua.

Definición 1.1.3. *Diremos que E con la topología $\mathcal{T}$ y con la proyección $\pi:E\to B$, es el **espacio total** definido por $\mathcal{E}$.*

Definición 1.1.4. *Si $\mathcal{E}$ es el haz constante sobre B definido para un espacio de Banach E_0, entonces el espacio E se identifica con $B\times E_0$.*

1.1.3. Propiedades del módulo Γ

Sea $((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B. Sea $\mathcal{C}^+(B) = \{f \in \mathcal{C}(B) : f(\xi) \geq 0\}$. La aplicación $\Gamma \to \mathcal{C}^+(B)$ tal que $s \mapsto \|s\|$ posee las siguientes propiedades:

$$\text{(MN)} \quad \begin{cases} \|s+s'\| \leq \|s\| + \|s'\| \quad s, s' \in \Gamma; \\ \|fs\| = |f|\|s\| \quad s \in \Gamma, f \in \mathcal{C}(B). \\ \|s\| = 0 \Leftrightarrow s = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Definición 1.1.5. *Un* ***isomorfismo isométrico*** f *es un isomorfismo de* $\mathcal{C}(B)$*-módulos tal que* $\|f(x)\| = \|x\|$.

Sean B un espacio topológico, Γ un $\mathcal{C}(B)$-módulo con una aplicación

$$\|\cdot\| : \Gamma \to \mathcal{C}^+(B)$$

que cumple (MN). Buscaremos condiciones de manera que Γ sea isométricamente isomorfo a un módulo de secciones continuas de un haz de Banach sobre B.

Recordemos que un filtro $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de un conjunto X si

(F1) $F \in \mathscr{F}$, $F \subset F'$, entonces $F' \in \mathscr{F}$;

(F2) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$.

Notemos que necesariamente $X \in \mathscr{F}$ para cualquier filtro $\mathscr{F}$.

Ejemplo 2. *Sea* $X \neq \varnothing$*. Entonces* $\{X\}$ *es un filtro en* X *llamado el* ***filtro trivial****.*

Ejemplo 3. *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$*. Consideremos la familia de vecindades de* x*, llamémosle* $\mathcal{N}_x$*, es un filtro en* X *llamado* ***filtro de vecindades*** *de* $x \in X$*. Este filtro siempre es generado por una base de vecindades.*

Definición 1.1.6. *Diremos que un filtro* $\mathscr{F}$ *sobre* Γ *converge local y uniformemente a un elemento* $s \in \Gamma$ *si, para todo* $z \in B$ *y todo* $\varepsilon > 0$*, existe una vecindad* Y *de* z *y un* $V \in \mathscr{F}$ *tal que, para todo* $s' \in V$*, tenemos que* $\|s - s'\| < \varepsilon$ *en* Y*. Diremos que* $\mathscr{F}$ *es un filtro de Cauchy si, para todo* $z \in B$ *y todo* $\varepsilon > 0$*, existe una vecindad* Y *de* z *y un* $V \in \mathscr{F}$ *tal que, para todos* $s', s'' \in V$*, tenemos* $\|s' - s''\| < \varepsilon$ *en* Y*.*

Observación 1.1.3. *En general, sobre* Γ*, no hay una topología tal que estas nociones se correspondan con la noción de convergencia de filtros para esta topología.*

Definición 1.1.7. *Diremos que* Γ *es* ***completo*** *para la convergencia local uniforme si todo filtro de Cauchy converge local y uniformemente a un elemento de* Γ*.*

Recordemos que un espacio topológico X es regular si para cualquier subconjunto cerrado F de X, y para un punto x de X que no está en F, existe una vecindad U de x y una vecindad V de F de tal forma que U y V son disjuntos. Es decir, podemos separar puntos de cerrados por abiertos.

Un espacio topológico X es localmente paracompacto si para todo x existe una vecindad U de X que es paracompacto.

Proposición 4. *Sea B un espacio topológico regular localmente paracompacto. Sea Γ un $\mathcal{C}(B)$-módulo con una aplicación $\Gamma \to \mathcal{C}^+(B)$ dada por $s \mapsto \|s\|$ que verifica* (MN). *Entonces existe un haz de Banach $\mathcal{E}$ sobre B tal que Γ es isométricamente isomorfo a un módulo de secciones continuas de $\mathcal{E}$, si, y sólo si Γ es completo para la convergencia local uniforme.*

Demostración. Supongamos que Γ es el módulo de secciones continuas de $\mathcal{E}$. Si $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy sobre Γ, entonces $\mathscr{F}$ define un filtro de Cauchy $\mathscr{F}(z)$ sobre cada fibra $E(z)$, y para todo $z \in B$, $\mathscr{F}(z)$ converge a $s(z) \in E(z)$, así vemos que $E(z)$ es completo. Ahora mostramos que las secciones así definidas son continuas: para todo $z \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, sean Y una vecindad de z y $V \in \mathscr{F}$ tales que, para todo $s', s'' \in V$, tenemos $\|s' - s''\| \leq \varepsilon$ en Y. Sea $s' \in V \subset \Gamma$; luego $\|s - s'\| \leq \varepsilon$ en Y, y por H.4, $s \in \Gamma$. La convergencia local uniforme de $\mathscr{F}$ es trivial.

Recíprocamente, observemos que para todo $z \in B$, $J(z) = \{s \in \Gamma : \|s(z)\| = 0\}$ es un submódulo de Γ; denotemos $E(z) = \Gamma/J(z)$. Entonces $E(z)$ es un $\mathcal{C}(B)$-módulo, y en particular, un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Para $\xi \in E(z)$, sea $s \in \Gamma$ un representante de ξ. El número $\|s(z)\|$ no depende de la elección del representante elegido, lo denotaremos como $\|\xi\|$. La aplicación $\xi \mapsto \|\xi\|$ es una norma en $E(z)$. Por otro lado, para todo $\xi \in E(z)$ admite un representante $s \in \Gamma$ tal que, para todo $z' \in B$, tenemos $\|s(z')\| \leq \|\xi\|$; en efecto, si $s' \in \Gamma$ es un representante arbitrario de ξ, entonces si tomamos

$$s = \left[\sup\left(1, \frac{\|s'\|}{\|\xi\|}\right)\right]^{-1} s',$$

obtenemos la desigualdad buscada. Ahora mostraremos que $E(z)$ es completo, y que para toda familia (ξ_i) de elementos de $E(z)$ tales que $\sum \|\xi_i\| < \infty$ es sumable. Sea (ξ_i) una familia sumable, y para toda i, sea $s_i \in \Gamma$ un representante de ξ_i tal que $\|s_i\| \leq \|\xi_i\|$. Afirmamos que la familia (s_i) es sumable en Γ, en efecto, las sumas parciales finitas definen un filtro de Cauchy, si $s = \sum_{i \in I} \|s_i\|$, la clase ξ de s en $E(z) = \Gamma/J(z)$ entonces $\xi = \sum_{i \in J} \|\xi_i\|$. Por lo tanto, las fibras $E(z)$ forman una familia de espacios de Banach indexados por los elementos de B. Para todo $s \in \Gamma$, sea $\hat{s}$ la sección que asocia a cada $z \in B$ la imagen canónica de s en $E(z)$. La aplicación $\Gamma \to \prod_{z \in B} E(z)$, definida por $s \mapsto \|\hat{s}\|$ es $\mathcal{C}(B)$-lineal e inyectiva ya que $\|\hat{s}\| = \|s\|$. Su imagen Λ satisface los axiomas H.1 a H.3. Mostraremos que cumple H.4, lo que concluirá la prueba de la proposición.

Las hipótesis sobre B nos llevan a que todo $z \in B$ admite una vecindad K con la siguiente propiedad:

(RP): *para toda cubierta abierta (Y_i) de B, existen funciones continuas $\eta_i : B \to [0, 1]$, tales que η_i tiene soporte compacto en Y_i, y la suma de las η_i es localmente finita menor o igual a 1, e igual a 1 en K.*

Sea w una sección tal que, para todo $z \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $s \in \Gamma$ tal que $\|w - \hat{s}\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z. Así pues mostraremos que $w \in \Lambda$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $K \subset B$ tales que verifican (RP). Existe una cubierta abierta (Y_i) de B y una familia (s_i) de elementos de Γ tales que $\|w - \hat{s}_i\| \leq \varepsilon$ en Y_i. Sea (η_i) una familia de funciones con la propiedad (RP), relativas a K y (Y_i). La familia $(\eta_i s_i)$

es sumable en Γ, ya que las sumas parciales finitas definen un filtro de Cauchy. Sea $s = \sum_{i\in I} \eta_i s_i$. Tenemos que $\|w - \hat{s}\| \leq \varepsilon$ en K. Por lo tanto, el conjunto $V(K,\varepsilon) = \left\{t \in \Gamma : \|w - \hat{t}\| \leq \varepsilon, \text{en K}\right\}$ es no vacío. Los $V(K,\varepsilon)$, para $K \subset B$ con la propiedad (RP) y $\varepsilon > 0$, forman una base de filtros de Cauchy. Este filtro converge a alguna sección $t \in \Gamma$, y se sigue que $w = \hat{t}$. ■

1.1.4. Homomorfismos

En esta subsección definiremos los homomorfismos entre haces de Banach, para ellos daremos aplicaciones que son homomorfismos fibra a fibra, y definiremos un homomorfismo entre haces como la familia de estos homomorfismos.

Definición 1.1.8. *Sean $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ haces de Banach sobre un mismo espacio topológico B. Sean E y E' sus espacios totales, respetivamente. Un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ es una familia $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ de aplicaciones lineales $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ tales que la aplicación $\varphi : E \to E'$ es continua.*

Proposición 5. *Sean $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ haces de Banach, y sea Λ un subconjunto total de Γ. Sea $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ una familia de aplicaciones lineales $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$. Para toda sección $s \in \Gamma$, observemos que $\varphi(s)$ es la sección $s' \in \Gamma'$ definida por $s'(z) = \varphi(s(z))$, y notemos además que $\|\varphi\|$, la función, $z \mapsto \|\varphi_z\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\varphi_z(z)\|$. Entonces φ es un homomorfismo si, y sólo si:*

1. *para todo $s \in \Lambda$, $\varphi(s) \in \Gamma'$;*
2. *$\|\varphi\|$ es localmente acotada.*

Demostración. Sean $\pi : E \to B$, $\pi' : E' \to B$, las proyecciones canónicas, y sea $\langle\Lambda\rangle$ el subespacio vectorial de Γ generado por Λ. Sean $\xi \in E$ y $\varphi(\xi) = \xi' \in E'$. Mostraremos que toda vecindad V' de ξ' en E' es la imagen inversa de una vecindad de ξ en E. Por definición de la topología de E', V' contiene un tubo $T'(Y_1, s', \varepsilon)$, donde Y_1 es una vecindad de $z = \pi(\xi) = \pi'(\xi')$, donde $s' \in \Gamma'$ y $s'(z) = \xi'$; podemos suponer que $\|\varphi\| \leq M$ en Y_1. Sea $s \in \langle\Lambda\rangle$ tal que $\|s(z) - \xi\| \leq \varepsilon/4M$. Entonces $\|\varphi(s(z)) - \xi'\| \leq \varepsilon/4$. Pero, $\varphi(s) \in \Gamma'$, por hipótesis, y $s' \in \Gamma'$, por construcción, por lo tanto, la función $\|\varphi(s) - s'\|$ es continua, y además $\|\varphi(s(z)) - s'(z)\| \leq \varepsilon/2$ en una vecindad Y_2 de z. Entonces V' contiene a $T' = T'(Y, \varphi(s), \varepsilon/2)$ con $Y = Y_1 \cap Y_2$. Así, la imagen inversa de φ contiene a la vecindad $T(Y, s, \varepsilon/2M)$ de ξ.

Ahora supongamos que φ es un homomorfismo, así $\varphi : E \to E'$ es continua, luego s esá en Λ, luego s es una sección en Γ, y en consecuencia $\varphi(s)$. Sea $z \in B$. El tubo $T'(B, 0, 1) = \{\xi' \in E' : \|\xi'\| < 1\}$, es tal que $\varphi^{-1}(T'(B, 0, 1))$ es un conjunto abierto de V que contiene a la sección nula. Existen una vecindad Y de z y un $\varepsilon > 0$ tales que $T(B, 0, \varepsilon) \subset V$. Entonces $\|\varphi\| \leq \varepsilon^{-1}$ en Y, por lo tanto $\|\varphi\|$ es localmente acotada. ■

Observación 1.1.4. *Todo homomorfismo $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ define una aplicación $\mathcal{C}(B)$-lineal $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$. Una aplicación $\mathcal{C}(B)$-lineal $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ es definida por un* *homomorfismo de haces de Banach si, y solo si existe una función localmente acotada $\rho : B \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $s \in \Gamma$, $\|\varphi(s)\| \leq \rho\|s\|$.*

Definición 1.1.9. *Un **isomorfismo** $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es una familia $(\varphi_z)_{z\in B}$ tal que:*

1. *$\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ es un isomorfismo (isométrico);*

2. *$\varphi(\Gamma) = \Gamma'$.*

Definición 1.1.10. *Si $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ es un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$. Si cada $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ es una aplicación lineal continua con inversa continua, y si $\varphi^{-1} = \left(\varphi_z^{-1}\right)_{z\in B}$ es un homomorfismo, diremos que φ es **isomorfismo débil**.*

Proposición 6. *Sea Λ un subconjunto total de Γ. Entonces $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ es un isomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ si, y sólo si para todo $z \in B$, $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ es un isomorfismo isométrico, y además $\varphi(\Lambda) \subset \Gamma'$.*

Demostración. Por la Proposición 5, sabemos que $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$. Sean $s' \in \Gamma'$, $z \in B$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos, $s = \varphi^{-1}(s')$. Sea $t \in \Gamma$ tal que $t(z) = s(z)$. Así $\varphi(t) \in \Gamma'$ y $\varphi(t(z)) = \varphi(s(z)) = s'(z)$, por lo tanto $\|\varphi(t) - s'\| \leq \varepsilon$ en una vecindad Y de z, luego $\|t - s\| \leq \varepsilon$ en Y. Así, $s \in \Gamma$. Por lo tanto, $\varphi^{-1}(\Gamma) \subset \Gamma$ y finalmente $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$.
■

Corolario 1.1.1. *Supongamos que para toda $z \in B$, $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ es una aplicación lineal con inversa continua. Además, supongamos que las funciones $z \mapsto \|\varphi_z\|$ y $z \mapsto \|\varphi_z^{-1}\|$ son localmente acotadas, y que $\varphi(\Lambda) \subset \Gamma$. Entonces*

$$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

es un isomorfismo débil.

Demostración. Al ser $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ lineal y con inversa continua, entonces φ_z es un isomorfismo. Luego, φ_z^{-1} es lineal, y por lo tanto, φ es un isomorfismo débil.
■

Observación 1.1.5. *Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son haces constantes, definidos para los espacios de Banach E y E', respectivamente, un isomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ es una aplicación de B en el conjunto de isomorfismos de E en E', continua en la topología fuerte (fuertemente continua).*

Definición 1.1.11. *Un haz de Banach es **trivial** si es isomorfo al haz constante (producto). Si es debilbemente isomorfo al haz constante, diremos que es **debilmente trivial**.*

1.1.5. Imágenes inversas

Sean B y B' espacios topológicos y $f : B' \to B$ una aplicación continua. Para todo haz $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ de Banach sobre B, consideremos la familia de espacios de Banach $(E'(z'))_{z' \in B'}$ definida por $E'(z') = E(f(z'))$.

El conjunto $\Lambda' = \{s \circ f : s \in \Gamma\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ que cumple H.2 y H.3, y en consecuencia T.1 y T.2. Por la Proposición 2, existe un Γ' y un único $\Lambda' \subset \Gamma'$ tal que satisface H.1 a H.4. Entonces $\mathcal{E}' = \left((E'(z'))_{z' \in B'}, \Gamma'\right)$ es un haz de Banach sobre B', al cual llamamos **imagen inversa** de $\mathcal{E}$ por f, lo denotamos por $f^*(\mathcal{E})$. Sean E el espacio total de $\mathcal{E}$ y $\pi : E \to B$ su proyección canónica.

Observación 1.1.6. *El espacio total E' definido para $\mathcal{E}'$ se indentifica con el subespacio $A' = \{(z', \xi) \in B' \times E : f(z') = \pi(\xi)\}$ de $B' \times E$, con la topología inducida por la topología producto.*

Sean B un espacio topológico, y Y un subespacio de B. Si $i : Y \hookrightarrow B$ es la inlusión, $\mathcal{E}' = i^*(\mathcal{E})$ es llamado el **haz inducido** sobre Y por $\mathcal{E}$, y lo denotamos por $\mathcal{E}|_Y$. Una sección sobre Y que es continua relativa a $\mathcal{E}'$ es, por la Proposición 2, una sección sobre Y que es límite de secciones de Γ, para la convergencia local uniforme sobre Y, i. e., una sección continua en cada punto de z.

Definición 1.1.12. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ haces de Banach sobre B, diremos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son **localmente isomorfos** si todo $z \in B$ admite una vecindad Y tal que los haces inducidos por $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ sobre Y son isomorfos.*

Definición 1.1.13. *Un haz de Banach se dice **localmente trivial** si es localmente isomorfo a un haz constante.*

Lema 1.1.1. *Sean B un espacio paracompacto, Y un subconjunto cerrado de B, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, s una sección continua sobre B, t una sección continua sobre Y, $a > 0$ tal que $\|s(z) - t(z)\| < a$ en Y. Entonces existe $s' \in \Gamma$ tal que*

$$\|s'(z) - t(z)\| < a/2, \text{ en } \quad Y$$

y

$$\|s'(z) - s(z)\| < 2a, \text{ en } B.$$

Demostración. Existe una cubierta $(V_i)_{i \in I}$ de Y de subconjuntos abiertos de B, y para todo $i \in I$, secciones $s_i \in \Gamma$, tales que $\|s_i(z) - t(z)\| < a/2$ en V_i. Por ser B paracompacto, podemos suponer que $(V_i)_{i \in I}$ es un refinamiento localmente finito. Sea (η_i) una partición de la unidad, esto es una familia de funciones no negativas tal que su suma es menor o igual que 1, continuas en B y subordinadas a $(V_i)_{i \in I}$, tal que $\sum_{i\in I}\eta_i = 1$ sobre Y. Sea $s_1 = \sum_{i\in I}\eta_i s_i$. Luego

$$\begin{aligned}
\|s_1(z) - t(z)\| &= \left\|\sum_{i\in I}\eta_i s_i(z) - t(z)\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right) s_i(z) - \left(\sum_{i\in I}\eta_i\right) t(z)\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right)(s_i(z) - t(z))\right\| \\
&= \|s_i(z) - t(z)\| \\
&< \frac{a}{2},
\end{aligned}$$

en Y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|s_1(z) - s(z)\| &= \left\|\sum_{i\in I}\eta_i s_i(z) - s(z)\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right) s_i(z) - \left(\sum_{i\in I}\eta_i\right) s(z)\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right)(s_i(z) - s(z))\right\| \\
&= \|s_i(z) - (z)\| \\
&< 2a
\end{aligned}$$

en una vecindad abierta Z de Y. Sea $f : B \to [0,1]$ definida de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{sí} \quad z \in Y \\ 0 < x < 1 & \text{sí} \quad z \in Z \setminus Y \\ 0 & \text{sí} \quad z \in B \setminus Z \end{cases}.$$

Sea

$$s'(z) = f(z)\, s_1(z) + (1 - f(z))\, s(z).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|s'(z) - t(z)\| &= \|f(z)\, s_1(z) + (1 - f(z))\, s(z) - t(z)\| \\
&= \|s_1(z) - t(z)\| \\
&< \frac{a}{2} \qquad \text{en Y;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|s'(z) - s(z)\| &= \|f(z)\, s_1(z) + (1 - f(z))\, s(z) - s(z)\| \\
&= \|s_1(z) - s(z)\| \\
&< 2a \qquad \text{en B.}
\end{aligned}$$

■

Proposición 7. *Sean B un espacio paracompacto, Y un subconjunto cerrado de B, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, t una sección continua de Y. Entonces t se puede extender a una sección continua de B.*

Demostración. Construiremos una sección $s_0 \in \Gamma$ tal que $\| s_0(z) - t(z) \| < 1$ en Y. Esto lo lograremos aplicando el Lema 1.1.1 de manera recurrente, y así obtenemos una sucesión de secciones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ tales que $\| s_n(z) - t(z) \| < 2^{-n}$ en Y, y $\| s_n(z) - s_{n-1}(z) \| < 2^{-n+2}$ en B. La sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $s \in \Gamma$. Por lo tanto, $s|_Y(z) = t(z)$. ∎

Proposición 8. *Sean $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, Y_1, Y_2 subconjuntos cerrados de B, s_i secciones continuas sobre Y_i. Supongamos que $s_1(z) = s_2(z)$, para todo $z \in Y_1 \cap Y_2$. Definamos s de la siguiente manera:*

$$s(z) = \begin{cases} s_1(z), & \text{sí} \quad z \in Y_1 \\ s_2(z), & \text{sí} \quad z \in Y_2 \end{cases}.$$

Entonces s es continua en $Y_1 \cup Y_2$.

Demostración. Se sigue del lema de pegado. ∎

Proposición 9. *Sean B un espacio completamente regular y $(Y_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de B; definamos $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$. Para toda $i \in I$, sea $\mathcal{E}_i = ((E(z)), \Gamma_i)$ un haz de Banach sobre Y_i. Para todos los $i \in I$, sea $g_{ij} : \mathcal{E}_j|_{Y_{ij}} \to \mathcal{E}_i|_{Y_{ij}}$ un isomorfismo. Supongamos que, para todos los $i, j, k \in I$, tenemos $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$. Entonces existe una haz de Banach sobre B, y un único isomorfismo con la siguiente propiedad: para todo $i \in I$, existe un isomorfismo $h_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}|_{Y_i}$, tal que $g_{ij} = h_i^{-1}h_j$ para todos los $i, j \in I$.*

Demostración. La unicidad es inmediata. Probemos la existencia. Para todo $z \in B$, sea $I(z) = \{i \in I : z \in Y_i\} \neq \varnothing$. Si $i, j \in I(z)$, $g_{ij}(z) : E_j(z) \to E_i(z)$ es un isomorfismo, y $g_{ij}(z)\, g_{jk}(z) = g_{ik}(z)$ si $i, j, k \in I(z)$. Por lo tanto, existe un espacio de Banach $E(z)$ y, para todo $i \in I(z)$, un isomorfismo $h_i(z) : E(z) \to E(z)$ tal que $g_{ij}(z) = h_i(z)^{-1}\, h_j(z)$, para $i, j \in I(z)$. Existe un conjunto Δ_i y una única sección definida sobre Y_i con valores en $E(z)$ tales que

$$(h_i(z))_{z\in Y_i} : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}_i = \left((E(z))_{z\in Y_i}, \Delta_i\right)$$

es un isomorfismo. Luego, $\mathcal{F}_i|_{Y_{ij}} = \mathcal{F}_j|_{Y_{ij}}$.

Sea $\Gamma = \{s \in \sqcup_{z\in B} E(z) : s_{Y_i} \in \Delta_i \text{ para todo } i \in I\}$. Por la definición de Γ, este cumple con H.1, H.3 y H.4. Veamos que también cumple H.2. Sean $z_0 \in B$ y $\xi \in E(z_0)$. Sea $i \in I$ tal que $z_0 \in Y_i$. Sea $V \subset Y_i$ una vecindad de z_0, cerrada en B. Sea $\eta : B \to \mathbb{R}$ una función continua dada por:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1 & \text{sí} \quad z = z_0 \\ 0 < x < 1 & \text{sí} \quad z \in V \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{sí} \quad z \in B \setminus V \end{cases}.$$

Sea $t \in \Delta_i$, tal que $t(z_0) = \xi$. Sea $s \in \sqcup_{z \in B} E(z)$ tal que

$$s(z) = \begin{cases} (\eta t)(z) & \text{sí} \quad z \in V \\ 0 & \text{sí} \quad z \in B \setminus V \end{cases}.$$

Luego $s(z_0) = \xi$. Mostraremos que $s \in \Gamma$. Sea $j \in I$ y veamos que $s|_{Y_j} \in \Delta_j$. Es suficiente ver que, para todo $z_1 \in Y_j$, s coincide, en una vecindad de z_1, con un elemento de Δ_j. Esto resulta inmediato si $z_1 \notin V$. Supongamos que $z_1 \in V$. Entonces $z_1 \in Y_{ij}$. Como $\mathcal{F}_i|_{Y_{ij}} = \mathcal{F}_j|_{Y_{ij}}$ y s coincide, en una vecindad de z_1, con algún elemento de Δ_i, nuestra afirmación queda establecida.

Probamos que $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ es un haz de Banach sobre B, y que $\mathcal{E}|_{Y_i} = \mathcal{F}_i$. ∎

Sean B un espacio localmente paracompacto, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, $B' = B \cup \{\omega\}$. Definamos $E'(z)$ como

$$E'(z) = \begin{cases} E(z) & \text{sí} \quad z \in B \\ 0 & \text{sí} \quad z = \omega \end{cases}.$$

Sea Γ' el conjunto de secciones s relativas a $(E'(z))_{z \in B'}$ tales que:

1. $s|_B \in \Gamma$;
2. $\|s\| \longrightarrow 0$ cuando z tiende a ω;
3. $s(\omega) = 0$.

Proposición 10. *$\mathcal{E}' = \left((E'(z))_{z \in B'}, \Gamma'\right)$ es un haz de Banach sobre B', y $\mathcal{E}'|_B$ se identifica canónicamente con $\mathcal{E}$.*

Demostración. Por como definimos Γ', este verifica de manera inmediata H.1, H.3 y H.4; el condición H.2 se sigue de la paracompacidad de B. Sea Γ_0 el conjunto de restricciones de B de Γ', i. e., el conjunto de elementos de Γ que tienden a cero cuando los z tienden a ω. Entonces Γ_0 es un subconjunto total de Γ, y los transforma en elementos Γ_0 por las aplicaciones identidad de $E(z)$ son las secciones continuas relativas a $\mathcal{E}'|_B$. Por lo tanto, $\mathcal{E} = \mathcal{E}'|_B$. ∎

1.1.6. Subhaces

Definición 1.1.14. *Sea $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de espacios de Banach. Un* ***subhaz*** *de $\mathcal{E}$ es un haz $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ de espacios de Banach sobre B tal que para todo $z \in B$, $E'(z)$ es un subespacio vectorial cerrado de $E(z)$ y $\Gamma' \subset \Gamma$.*

Sea $\mathcal{E}$ un haz. Para todo $z \in B$, sea $E'(z)$ un subespacio vectorial cerrado de $E(z)$.

Proposición 11. *Las fibras $E'(z)$ inducen un subhaz $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ si, y sólo si existe $\Lambda \subset \Gamma$ tal que para todo $z \in B$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto total de $E'(z)$*

Demostración. Se sigue de la Propisición 2, en efecto, el conjunto de la secciones $s \in \Gamma$ tales que $s(z) \in E'(z)$ para todo z cumple T.1, T.2 y H.4. ■

Si $\mathcal{E}$ es un haz dado, y si $\Lambda \subset \Gamma$ es un subconjunto arbitrario, definimos un subhaz dado por $E'(z)$, el subespacio vectorial cerrado de $E(z)$ generado por $\Lambda(z)$: es el subhaz de $\mathcal{E}$ generado por Λ.

Si $\mathcal{E}'$ es un subhaz de $\mathcal{E}$, Γ' es un $\mathcal{C}(B)$-submódulo de Γ, y $E'(z) = \Gamma'(z)$ para toda $z \in B$, de esta manera vemos que $\mathcal{E}'$ está enteramente determinado por su conjunto de secciones Γ'.

Proposición 12. *Sea $\mathcal{E}$ un haz dado. $\Gamma' \subset \Gamma$ es un $\mathcal{C}(B)$-submódulo, entonces Γ' es el conjunto de secciones de un subhaz $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ si, y sólo si Γ' verifica H.4.*

Demostración. En efecto, si Γ' verifica H.4, entonces Γ' contiene a todas las secciones continuas del subhaz $\mathcal{E}'$ que lo generan. ■

Observemos que si Γ' y Γ'' son los submódulos de Γ, correspondientes a los subhaces $\mathcal{E}'$ y $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$, su intersección $\Gamma' \cap \Gamma''$ es también un submódulo de Γ, y en consecuencia, define un subhaz $\mathcal{E}''' = ((E'''(z)), \Gamma' \cap \Gamma'')$ de $\mathcal{E}$. Donde $E'''(z) \subset E'(z) \cap E''(z)$, la igualdad no se presenta en general. Por ejemplo, consideremos $B = [0,1]$, y sea $\mathcal{E}$ el haz constante definido por $\mathbb{C}^2$ con su base canónica $\{e_1, e_2\}$, digamos que $s'(z) = e_1$ y $s''(z) = e_1 + ze_2$, y sean $\mathcal{E}'$ y $\mathcal{E}''$ los subhaces de $\mathcal{E}$ generados por $s'(z)$ y $s''(z)$, respectivamente. Luego, $E'(z) \cap E''(z) = \{0\}$ si $z \neq 0$, y $E'(0) \cap E''(0) = \mathbb{C}e_1$, pero $\Gamma' \cap \Gamma'' = \{0\}$, toda sección $s \in \Gamma' \cap \Gamma''$ verifica que $s(z) = 0$ para $z \neq 0$, por lo tanto, también para $z = 0$.

Proposición 13. *Sean $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ un subhaz de $\mathcal{E}$, Y un subconjunto de B. Denfinamos $\mathcal{E}|_Y = \left((E(z))_{z\in Y}, \Delta\right)$ y $\mathcal{E}' = \left((E'(z))_{z\in Y}, \Delta'\right)$. Entonces $s \in \Delta'$ si, y sólo si $s(z) \in E(z)$ para todo $z \in Y$*

Demostración. El inverso es evidente. Supongamos que $z_0 \in Y$ y $\varepsilon > 0$, existe $t \in \Gamma$ tal que $\|t(z) - s(z)\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z_0 relativa a Y, y $t' \in \Delta$ tal que $\|t'(z) - t(z)\| \leq \varepsilon$ en una vecindad de z_0, de donde se sigue que $s \in \Delta'$. ■

Proposición 14. *Sea $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, y para todo $z \in B$ sea $E'(z)$ un subespacio vectorial cerrado de $E(z)$. Si B es paracompacto, entonces las fibras $E'(z)$ inducen un subhaz de $\mathcal{E}$. Además si las fibras $E'(z)$ inducen un subhaz de $\mathcal{E}$, entonces para toda $s \in \Gamma$, la función $d(s, E')$ es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Supongamos que las fibras $E'(z)$ inducen un subhaz de $\mathcal{E}$, luego la función

$$d\left(s, E'\right) = \inf_{s' \in \Gamma'} \|s - s'\|$$

es semicontinua inferiormente.

Ahora supongamos que B es paracompacto. Para todo $z_0 \in B$ y todo $\xi \in E'(z_0)$ construiremos una sección $s \in \Gamma$ tal que $s(z_0) = \xi_0$ y $s(z) \in E'(z)$ para todo z.

Procederemos por recurrencia, sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de secciones de Γ tal que $s_n(z_0)=\xi_0$, $d(s_n,E')<2^{-n}$ y $\|s_n-s_{n-1}\|<2^{-n+1}$ para $n\geq 1$. Construyamos s_0, sabemos que existe una sección $s'\in\Gamma$ tal que $s'(z_0)=\xi_0$. La función

$$d\left(s',E'\right)(z_0)=0$$

y

$$d\left(s',E'\right)(z)\leq 1$$

para z en una vecindad Y_0 de z_0. Sea η una función continua con soporte compacto en Y_0 tal que $0\leq\eta(z)\leq 1$ y $\eta(z_0)=1$, entonces $s=\eta s'$. Supongamos que tenemos s_{n-1} y construyamos s_n. Para todo $z\in B$, tenemos

$$d\left(s_{n-1},E'\right)<2^{-n+1}.$$

Por lo tanto, existe $\xi\in E'(z)$ tal que $\|s_{n-1}(z)-\xi\|<2^{-n+1}$, pero sabemos que existe $s'\in\Gamma$ tal que $s'(z)=\xi$, en consecuencia las desigualdades:

$$d\left(s',E'\right)<2^{-n}$$

y

$$\|s'-s_{n-1}\|<2^{-n+1}$$

se dan en una vecindad Y de z. Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta localmente finita, y sea (η_i) una partición de la unidad subordinada a $(Y_i)_{i\in I}$. Sea $s_i':Y_i\to E$, si suponemos que $z_0\in Y_0$, $\eta_0(z_0)=1$ y $s_0'(z_0)=\xi_0$, entonces $s_n=\sum\eta_i s_i'$. Por la construcción de s_n tenemos que (s_n) es una sucesión de Cauchy que convergente uniformemente a $s\in\Gamma$, y que además $d(s,E')=0$. ∎

Corolario 1.1.2. *Sean B un espacio paracompacto, E_0 un espacio de Banach, $\mathcal{E}_0$ el haz producto sobre B definido por E_0. Para todo $z\in B$, sea $E(z)$ un subespacio vectorial cerrado de E. Entonces $E(z)$ definen un sub-haz de $\mathcal{E}_0$ si, y solo si $z\to E(z)$ es semicontinua inferiormente, i. e., para todo conjunto abierto U de E_0, el conjunto de los $z\in B$ tales que $E(z)\cap U\neq\varnothing$ es abierto.*

Demostración. El corolario es inmediato de la Proposición anterior ∎

Observación 1.1.7. *La Proposición 14 y su corolario se pueden generalizar al caso en el que B es regular y localmente paracompacto (en particular localmente compacto).*

Proposición 15. *Sea $\mathcal{E}=((E(z)),\Gamma)$ un haz de Banach sobre B. Sean $s_1,\ldots,s_n\in\Gamma$. Para todo $z\in B$, sea $E'(z)=\langle(s_i(z))\rangle$ el subespacio vectorial de $E(z)$ generado por $(s_i(z))$. Supongamos que el conjunto $(s_i(z))$ es linealmente independiente para cada $z\in B$. Entonces, para todo $s\in\Gamma$, la función $d(s,E')$ es continua sobre B.*

Demostración. Para todo $z \in B$, tenemos

$$d\left(s, E'\right)(z) = \inf_{c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}} \|s(z) - c_1 s_1(z) - \ldots - c_n s_n(z)\|. \tag{1.2}$$

Sea $z_0 \in B$. Existe una vecindad V de z_0 y una constante $0 \leq \mu < \infty$ tales que $d(s, E') \leq \mu$ y $\|s\| \leq \mu$ en V. Para todo $z \in V$, sea

$$A(z) = \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n : \|c_1 s_1(z) + \ldots + c_n s_n(z)\| \leq 2\mu.\}$$

Entonces para $z \in V$ tenemos

$$d\left(s, E'\right)(z) = \inf_{c_1,\ldots,c_n \in A(z)} \|s(z) - c_1 s_1(z) - \ldots - c_n s_n(z)\|. \tag{1.3}$$

De esta manera, existe una vecindad $W \subset V$ de z_0 y una constante $0 \leq \nu < \infty$ tal que

$$|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 \leq \nu \|c_1 s_1(z) + \ldots + c_n s_n(z)\|^2 \tag{1.4}$$

con $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $z \in W$. Por lo tanto, existe un conjunto compacto A de $\mathbb{C}^n$ tal que $A(z) \subset A$ para todo $z \in W$. Así, para $z \in W$, tenemos

$$d\left(s, E'\right)(z) = \inf_{c_1,\ldots,c_n \in A} \|s(z) - c_1 s_1(z) - \ldots - c_n s_n(z)\|. \tag{1.5}$$

De esta manera, $\|s(z) - c_1 s_1(z) - \ldots - c_n s_n(z)\|$ es una función continua de $(c_1, \ldots, c_n, z)$. Como A es compacto, se concluye que $d(s, E')$ es continua en $V \cap W$. ■

Corolario 1.1.3. *Sean B un espacio compacto, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz de Banach sobre B, y $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma$. Consideremos a Γ con la topología de la convergencia uniforme sobre B. Entonces el conjunto*

$$M = \{s \in \Gamma : \{s_1(z), \ldots, s_n(z), s(z)\} \text{ es l. i.} \forall z \in B\}$$

es un conjunto abierto de Γ.

Demostración. Si las secciones $s_1, \ldots, s_n$ son linealmente dependientes en algún punto de B, entonces $M = \varnothing$. De lo contrario, aplicamos la proposición anterior. ■

1.1.7. Separabilidad

Definición 1.1.15. *Diremos que un haz de Banach $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ es* ***separable*** *si existe un subconjunto total Λ de Γ que es numerable.*

Observación 1.1.8. *Sea $\mathcal{E}$ un haz separable de Banach sobre B. Si la topología de B admite una base numerable, entonces la topología del espacio total definido por $\mathcal{E}$ admite una base numerable.*

Proposición 16. *Sean E un espacio de Banach separable y $H \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio de E. Sean B un espacio completamente regular, z_0 un elemento de B, $\mathcal{E}$ el haz producto sobre B definido por E y $\mathcal{E}'$ el subhaz de $\mathcal{E}$ definido por*

$$E'(z) = \begin{cases} E & si \quad z \neq z_0 \\ H & si \quad z = z_0 \end{cases}.$$

Entonces $\mathcal{E}'$ es separable si, y sólo si $\{z_0\} = \bigcap_{i \in I} V_i$, donde I es un conjunto numerable no vacío y $(V_i)_{i \in I}$ es una familia de vecindades de z_0.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{E}'$ es separable. Sea (s_n) un conjunto total de secciones continuas de $\mathcal{E}'$ tales que $s_n(z_0) \in H$. Definamos $f_n(z) = \text{ínf}\,(d(s_n(z), H), 1)$. Las funciones f_n son continuas, ya que el $d(s_n(z), H)$ es una función continua, y $f = \sum 2^{-n} f_n$ es continua. Pero $f^{-1}(0) = \{z_0\}$, entonces si $z \neq z_0$ los $s_n(z)$ son densos en E y $f_n(z) \neq 0$, para al menos un n. Entonces

$$Y_n = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

son las vecindades requeridas, ya que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n = \{z_0\}$$

Recíprocamente, sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto total de elementos en E, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto total de elementos en H, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un familia de vecindades de z_0 tales que $\bigcap Y_n = \{z_0\}$, y η_n una función continua con soporte en Y_n y tal que $\eta(z_0) = 1$. Los h_n y los $(1 - \eta_p) e_q$ definen un familia total numerable de secciones continuas relativas a $\mathcal{E}'$. ∎

Observación 1.1.9. *Sean B un producto numerable de intervalos $(0,1)$. La proposición anterior nos permite construir sobre B un haz de espacios de Hilbert no separable $((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$, tal que cada $\mathcal{H}(z)$ es separable.*

Proposición 17. *Sean B un espacio metrizable con base numerable, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un haz localmente débil trivial de espacios de Banach sobre B. Si cada fibra $E(z)$ es separable, entonces $\mathcal{E}$ es separable.*

Demostración. Consideremos (U_n) una cubierta abierta numerable de B tal que cada $\mathcal{E}|_{U_n}$ es un subhaz débil trivial. Sea (V_n) una cubierta abierta de B tal que $\overline{V}_n \subset U_n$ para todo n. Para todo n, existe un conjunto (s_{nm}) de secciones definidas y acotadas en U_n, tales que, para todo $z \in U_n$, el conjunto $(s_{nm}(z))$ son densos en $E(z)$. Sea $\eta_n : B \to [0,1]$ una función continua tal que:

$$\eta_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{sí} \quad z \in V_n \\ 0 & \text{sí} \quad B \setminus U_n \end{cases}.$$

Sea t_{nm} la sección en B dada por:

$$t_{nm}(z) = \begin{cases} (\eta_n s_{nm})(z) & \text{sí} \quad z \in U_n \\ 0 & \text{sí} \quad B \setminus U_n \end{cases}.$$

Si $z \in U_n$, t_{nm} es continua en una vecindad de z entonces

$$\|t_{nm}(z)\| = \|\eta_n s_{nm}\| = \|s_{nm}\| \leq \varepsilon;$$

esto prueba que $t_{nm} \in \Gamma$. Sean $z \in B$ y $\xi \in E(z)$. Existe n tal que $z \in V_n$; entonces ξ es el límite de las secciones $s_{nm}(z) = t_{nm}(z)$. Por lo tanto, los t_{nm} forman un conjunto total de Γ. ∎

1.1.8. Anexos

En esta sección presentamos algunos resultados sin demostración.

1. Sea B un espacio topológico, $\mathcal{E}$ un haz de Banach, E el espacio total definido para $\mathcal{E}$ y E' un espacio total sobre B localmente isomorfo a E. Luego, si B es completamente regular, entonces E' es el espacio total del subhaz $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$.

   Si B no es completamente regular, tenemos el siguiente contraejemplo:

   $$B := (-1,1) \times \{0,1\} / \sim$$

   donde $\sim$ es la relación de equivalencia obtenida de identificar $(t,0)$ con $(t,1)$ para $t \neq 0$.

2. Sean $\left((E(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ y $\left((E'(z))_{z\in B}, \Gamma'\right)$ dos haces de Banach.

   2.1. Si $z \in B$, entonces toda sección $s \in \Gamma$ tal que $s(z) = 0$, puede pensarse como fs', donde $s' \in \Gamma$, $f \in \mathcal{C}(B)$, $f(z) = 0$, por ejemplo, $f(z) = ||s(z)||^{1/2}$. Por lo tanto, toda aplicación $\mathcal{C}(B)$-lineal $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ está dada por una familia, $(\varphi_z)_{z\in B} : E(z) \to E'(z)$, $\mathbb{C}$-lineal.

   2.2. Si toda $z \in B$ admite una familia de vecindades, y si φ_z es continua para toda $z \in B$, entonces $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ es un homomorfismo.

3.1. Sean $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ un haz de Banach, $\mathcal{E}' = \left((E'(z))_{z\in B}, \Gamma'\right)$ un subhaz de $\mathcal{E}$, y $s \in \Gamma$. Entonces $\{z \in B : s(z) \in E'(z)\}$ es un conjunto G_δ de B.

3.2. Sean B un espacio completamente regular e Y un conjunto G_δ de B. Sea H_0 un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ el haz producto (constante) definido para H_0, $s \in \Gamma$, $s(z) = \xi$ y $0 \neq \xi \in H_0$. Entonces existe un subhaz $\left((E'(z))_{z\in B}, \Gamma'\right)$ de $\mathcal{E}$ tal que $s(z) \in E'(z)$ si, y sólo si $z \in Y$.

4. Sean B un espacio paracompacto, $\mathcal{E} = \left((E(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$, $\mathcal{E}' = \left((E'(z))_{z\in B}, \Gamma'\right)$ dos haces de Banach y $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un homomorfismo. Supongamos que para todo $z \in B$, $f_z(E(z))$ es denso en $E'(z)$. Entonces para toda sección $s' \in \Gamma'$ y para toda $h \in \mathcal{C}^+(B)$, tal que para toda $z \in B$, existe $s \in \Gamma$ tal que $||f(s) - s'||(z) < h(z)$.

1.2. Haces de espacios de Hilbert

1.2.1. Sumas de espacios de Hilbert

Sea $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ un haz de espacios de Hilbert sobre B. Si $s, t \in \Gamma$, la continuidad de la función $z \mapsto \langle s(z), t(z) \rangle$ se sigue de la identidad:

$$4\langle s(z), t(z)\rangle = \|s(z) + t(z)\|^2 - \|s(z) - t(z)\|^2$$
$$+ i\|s(z) + it(z)\| - i\|s(z) - it(z)\|^2.$$

Definición 1.2.1. *Sea $a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si para todo $z \in B$, $\dim \mathcal{H}(z) = a$, diremos que $\mathcal{E}$ es de **rango** a. Lo denotamos como* $\operatorname{rango}(\mathcal{E}) = a$

Definición 1.2.2. *Llamamos base de secciones ortonormales a una familia $(s_i)_{i\in I}$ de elementos de Γ tales que, para todo $z \in B$, $(s_i(z))_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}(z)$.*

Proposición 18. *$\mathcal{E}$ es trivial si, y sólo si existe una base de secciones ortonormales de $\mathcal{E}$.*

Demostración. Si $\mathcal{E}$ es trivial, entonces podemos escribir $E = \mathcal{H} \times B$, al ser $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, podemos dar una base para este, de manera que si $(e_i)_{i\in I}$ es una base, podemos definir su conjunto de secciones como $s_1(z) = e_1, s_2(z) = e_1, \ldots$. Esto nos da una familia $(s_i(z))_{i\in I}$ que es una base ortonormal para $H(z)$.

El recíproco se sigue de la Proposición 6. En efecto, si existe un conjunto total (s_n) de elementos de Γ tales que para todo $z \in B$, $(s_n(z))$ son linealmente independientes, entonces $\mathcal{E}$ es trivial, aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los s_n en cada punto de B forma una base de secciones ortonormales. En particular, si $\operatorname{rango}(\mathcal{E}) = \infty$ y trivial debilmente, entonces $\mathcal{E}$ es trivial. ■

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideremos un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Entonces el operador adjunto de T es el operador lineal $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que satisface $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo diremos que T es **hermitiano**. Además si el operador T conmuta con su operador hermitiano, i. e., $TT^* = T^*T$, diremos que T es **normal**.

Observación 1.2.1. *Sean $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ un haz de Hilbert sobre B y*

$$\psi = (\psi_z)_{z\in B} : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}(z)$$

un homomorfismo. Supongamos que para todo $z \in B$, ψ_z es hermitiano. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua. Para todo $z \in B$, denotemos $\psi'_z = p(\psi_z)$, el cual es un operador normal en $\mathcal{H}(z)$. Entonces $(\psi'_z)_{z\in B} : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}(z)$ es un homomorfismo.

Notemos que si $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}'(z)), \Gamma)$ y $\mathcal{E}' = ((\mathcal{H}'(z)), \Gamma')$ son haces de Hilbert y si $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ es un homomorfismo, donde cada $\varphi_z : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'$ es un homomorfismo. Entonces para todo $z \in B$, $\varphi_z^* : \mathcal{H}'(z) \to \mathcal{H}(z)$ es una aplicación lineal continua. En general $\varphi^* = (\varphi_z^*)_{z\in B}$ no es un homomorfismo de $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{E}$, por ejemplo cuando $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ es el haz producto.

Definición 1.2.3. *Si φ^* es homomorfismo de $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{E}$, diremos que φ es* ***adjuntable****.*

Recordemos que si T es un operador, entonces existe un único operador U tal que $U^2 = T$, entonces definimos $T^{1/2} := U$.

Proposición 19. *Supongamos que φ es adjuntable, y supongamos que φ es un isomorfismo débil. Entonces $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son isomorfos.*

Demostración. En efecto, $\left((\varphi^*\varphi)^{-1/2}\right) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un homomorfismo, por lo tanto, $\left(\varphi_z\,(\varphi^*\varphi)^{-1/2}\right)_{z\in B} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es un homomorfismo, sin embargo, para todo $z \in B$, $\varphi_z\,(\varphi_z^*\varphi)^{-1/2} : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'(z)$ es un isomorfismo isométrico, lo cual completa la prueba. ■

Sea I un conjunto. Para todo $i \in I$, sea $\mathcal{E}_i = ((\mathcal{H}_i(z)), \Gamma_i)$ un haz de Hilbert sobre B. Para todo $z \in B$, definimos

$$\mathcal{H}(z) = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i(z),$$

donde identificamos a cada $\mathcal{H}_i(z)$ como subespacio de $\mathcal{H}(z)$. Sea

$$\Gamma' = \left\{ \sum_{i\in J} s_i : s_i \in \Gamma_i \right\},$$

donde J es un subconjunto finito de I. Sea Γ el conjunto de las secciones $z \mapsto s(z)$ tales que para todo $z_0 \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad de z_0 y $t \in \Gamma'$ tales que $\|s(z) - t(z)\| \leq \varepsilon$ en V. Entonces $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ es un haz de Hilbert, llamdo el haz suma, y denotado por

$$\mathcal{E} := \bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}_i.$$

Por definición de $\mathcal{E}$, los $\mathcal{E}_i$ son subhaces de $\mathcal{E}$. Si ahora damos un haz de Hilbert $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ sobre B y suponemos que para todo $z \in B$, $\mathcal{H}(z)$ es suma de subespacios de Hilbert $\mathcal{H}_i(z)$, $i \in I$. Supongamos, además que, para todo $i \in I$, los $\mathcal{H}_i(z)$ inducen un subhaz $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$. Sea

$$\mathcal{E}' = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}_i = \left((\mathcal{H}'(z)), \Gamma'\right).$$

Sea $U_z : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'(z)$ el isomorfismo canónico. Luego los U_z inducen un isomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$.

Proposición 20. *Para toda $i \in I$, sea $\mathcal{E}_i = \left((\mathcal{H}_i(z))_{z\in B}, \Gamma_i\right)$ un haz continuo de Hilbert. Sea*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}_i = \left((\mathcal{H}(z))_{z\in B}, \Gamma\right).$$

Sea $z \mapsto s(z) \in \mathcal{H}(z)$ una sección sobre B, y sea $s_i(z) = P_{\mathcal{H}_i(z)} s(z)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *$s \in \Gamma$;*

2. *$s_i \in \Gamma_i$ para toda i y para todo $z_0 \in B$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad V de z_0 y un conjunto finito J de I tal que*

$$\left\| s(z) - \sum_{i \in J} s_i(z) \right\| \leq \varepsilon$$

en V;

3. *$s_i \in \Gamma_i$ para toda i y la función $\|s\|$ es continua.*

Demostración. Claramente (2) implica (1). Veamos que (1) implica (3): supongamos que $s \in \Gamma$. La función $\|s\|$ es continua. Por otro lado, sean $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$. Existe una suma finita $\sum_{i \in J} t_i$, $t_i \in \Gamma_i$, y una vecindad V de z_0 tales que

$$\left\| s(z) - \sum_{i \in J} t_i(z) \right\| \leq \varepsilon$$

en V. Por lo tanto, en V, $\|s_i(z) - t_i(z)\| \leq \varepsilon$ para $i \in J$ y $\|s_i(z)\| \leq \varepsilon$ para $i \in I \setminus J$. Esto prueba que $s_i \in \Gamma_i$ para toda i.

Ahora veamos que (3) implica (2): supongamos que se verifica la condición (3). Sean $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$. Sea J un conjunto finito de I tal que

$$\left\| s(z_0) - \sum_{i \in J} s_i(z_0) \right\| < \varepsilon.$$

La función

$$z \mapsto \left\| s(z) - \sum_{i \in J} s_i(z) \right\| = \left[\|s(z)\|^2 - \sum_{i \in J} \|s_i(z)\|^2 \right]^{1/2}$$

es continua y menor que ε en una vecindad de z_0. ■

Proposición 21. *Sea $\mathcal{E} = \left((\mathcal{H}(z))_{z \in B}, \Gamma \right)$ un haz continuo de haces de Hilbert. Sea I un conjunto. Supongamos que, para todo $z \in B$, $\mathcal{H}(z)$ es suma de subespacios de Hilbert $\mathcal{H}_i(z)$, $i \in I$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *para todo $i \in I$, los $\mathcal{H}_i(z)$ definen un subhaz continuo $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$;*

2. *para todo $s \in \Gamma$ y toda $i \in I$, la sección $z \mapsto P_{\mathcal{H}_i(z)} s(z)$ es continua;*

3. *para todo $s \in \Gamma$ y toda $i \in I$, la función $\left\| z \mapsto P_{\mathcal{H}_i(z)} s(z) \right\|$ es continua.*

Demostración. Tenemos que (2) implica (1). Veamos (1) implica (3): Supongamos (1), tenemos que $\mathcal{E}$ se identifica con $\oplus \mathcal{E}_i$, y (3) se cumple por la Proposición 20.

Ahora, veamos que (3) implica (2): sean $s \in \Gamma$, $i \in I$, $z_0 \in B$, $\varepsilon > 0$, y $t \in \Gamma$ tales que $t(z_0) = P_{\mathcal{H}_i(z_0)} s(z_0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|P_{\mathcal{H}_i(z)} s(z) - t(z)\right\| &\leq \left\|P_{\mathcal{H}_i(z)}(s(z) - t(z))\right\| + \left\|t(z) - P_{\mathcal{H}_i(z) t(z)}\right\| \\ &= \left\|P_{\mathcal{H}_i(z)}(s(z) - t(z))\right\| + \left[\|t(z)\|^2 - \|P_{\mathcal{H}_i(z)} t(z)\|^2\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

La expresión anterior es una función continua de z y se anula en z_0, y es menor o igual que ε en una vecindad de z_0. Donde la sección $z \mapsto P_{\mathcal{H}_i(z)}$ es continua. Esto prueba la proposición. ■

Observación 1.2.2. *Sean $\mathcal{E} = \left((\mathcal{H}(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ un haz de Hilbert,*

$$\mathcal{E}' = \left((\mathcal{H}'(z))_{z\in B}, \Gamma'\right)$$

*un subhaz de $\mathcal{E}$. Decimos que $\mathcal{E}'$ es un **sumando directo** de $\mathcal{E}$ si existe un subhaz continuo $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$, i. e., si $(\mathcal{H}(z) \ominus \mathcal{H}'(z))_{z\in B}$ define un subhaz de $\mathcal{E}$. Podemos escribir, $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$.*

Proposición 22. *Sea $\mathcal{E} = \left((\mathcal{H}(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ un haz de Hilbert. Sea $\mathcal{E}' = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma')$ un subhaz de rango finito de $\mathcal{E}$. Entonces $\mathcal{E}'$ es sumando directo de $\mathcal{E}$.*

Demostración. Por la Proposición 21, la propiedad a verificar es de naturaleza local. Podemos suponer que $\mathcal{E}'$ es el haz producto. Luego, existen $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma'$ tal que, para todo $z \in B$, los $s_1(z)$ forman una base ortonormal de $\mathcal{H}'(z)$. Sea $s \in \Gamma$. La sección

$$z \mapsto P_{\mathcal{H}'(z)} s(z) = \sum_{i=1}^{n} \langle s(z), s_i(z)\rangle s_i(z)$$

es continua. Es suficiente aplicar Proposición 21. ■

1.2.2. El espacio fibrado principal asociado a un haz de rango constante

Sean $a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{E} = \left((\mathcal{H}(z))_{z\in B}, \Gamma\right)$ un haz de Hilbert de rango a. Sea E el espacio total definido por $\mathcal{E}$, con su proyección $\pi : E \to B$. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión a, y consideremos $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ con la topología fuerte. Probaremos que E es un espacio fibrado asociado a un espacio fibrado principal P de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Es decir, construiremos un espacio topológico P con una proyección $\rho : P \to B$, sobre el cual $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ actúa por la derecha y verifica:

1. ρ es una aplicación abierta;

2. las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ en P son las fibras $\rho^{-1}(z)$, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ que actúan transitivamente en cada fibra;

3. la acción $P \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) \to P$ es continua;

4. si $\Delta = \{(u,v) \in P \times P : p(u) = p(v)\}$, la aplicación $\sigma : \Delta \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ definida para $\sigma(u,v) = g$ si $v = ug$, es continua;

5. $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ actúa sobre $P \times \mathcal{H}$ por $((u,\xi), g) \mapsto (ug, g^{-1}\xi)$, E se identifica con el espacio cociente de $P \times \mathcal{H}$ con la relación de equivalencia inducida por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Definiremos el conjunto P como el conjunto de isomorfismos $\mathcal{H} \to \mathcal{H}(z)$, $z \in B$. El grupo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ actúa en P mediante la aplicación $(U,V) \to UV$ de $P \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) \to P$. El conjunto P tiene una aplicación proyección $\rho : P \to B$; para toda $z \in B$, $\rho^{-1}(z)$ es el conjunto de isomorfismos de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}(z)$. Las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ en P son los conjuntos $\rho^{-1}(z)$, y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ actúa transitivamente en cada fibra $\rho^{-1}(z)$. El conjunto P es identificado con un conjunto de aplicaciones de $\mathcal{H}$ en el espacio topológico E; equiparemos al conjunto P con la topología de la convergencia puntual en $\mathcal{H}$. Sean $T_1, \ldots, T_n$ vecindades tubulares de E, y $\xi_1, \ldots, \xi_n$ los elementos de $\mathcal{H}$; sea $W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ el conjunto de $U \in P$ tales que

$$U\xi_1 \in T_1, \ldots U\xi_n \in T_n;$$

como las vecindades tubulares forman una base de la topología de E, los conjuntos de la forma $W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ forman una base para la topología de P; y $U\xi_1, \ldots, U\xi_n$ tienen la misma proyección sobre B, incluso podemos suponer que $T_1, \ldots, T_n$ poseen la misma proyección sobre B. Incluso podemos suponer que $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es ortonormal, y escribir $\xi_1, \ldots, \xi_n$ como combinaciones lineales de n vectores ortonormales. Es claro que $\rho : P \to B$ es una aplicación lineal. Mostraremos que esta aplicación es abierta. Sean $U_0 \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, donde $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es ortonormal, y $z_0 = \rho(U_0)$. Esto es para mostrar que $\rho(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n))$ es una vecindad de z_0; tomemos $T_i = T(Y, s_i, \varepsilon_i)$; tenemos $\|U_0\xi_i - s_i(z_0)\| \leq \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; donde para todo z en una vecindad de z_0 en Y, existe un sistema ortonormal $\eta_1, \ldots, \eta_n$ en $\mathcal{H}(z)$ tales que $\|\eta_i - s_i(z)\| \leq \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, otra manera de decir que $\eta_i \in T_i$; si $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}(z)$ es un isomorfismo tal que $U\xi_1 = \eta_1, \ldots, U\xi_n = \eta_n$, tenemos que $U \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, donde $z \in \rho(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n))$. Esto prueba que la aplicación es abierta.

Sean $U_0 \in P$, $V_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$, $\eta_i = U_0V_0(\xi_i)$, T_i una vecindad tubular que contiene η_i. Sea $V \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $\|V\xi_i - V_0\xi_i\| \leq \varepsilon$ para $i = 1, 2 \ldots, n$. Para todo $U \in P$, tenemos que $\|UV\xi_i - UV_0\xi_i\| \leq \varepsilon$. Por otro lado, $UV_0\xi_i \in T_i$ si U está en una vecindad de U_0 en P. Donde $UV\xi_i \in T_i$ para U en una vecindad de U_0 en P y V en una vecindad de V_0 en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Esto prueba que la aplicación $(U,V) \to UV$ de $P \times \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es continua.

Sean $U_0 \in P$, $U_0' \in P$, $V_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tales que $U_0 = U_0'V_0$. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$, y $\varepsilon > 0$. Sea $T_i = T(Y, s_i, \varepsilon)$ una vecindad tubular que contiene $U_0\xi_i$. Si U está en una vecindad de U_0, tenemos $U\xi_i \in T_i$; si U' está en una vecindad de U_0', tenemos $U'V_0\xi_i \in T_i$; aunque $\rho(U) = \rho(U')$, vemos que $\|U\xi_i - U'V_0\xi_i\| < 2\varepsilon$, donde $\|U'^{-1}U\xi_i - V_0\xi_i\| < 2\varepsilon$. Luego la aplicación $(U,U') \to U'^{-1}U$, definida sobre el conjunto $\Delta = \{(U,U') \in P \times P : \rho(U) = \rho(U')\}$, es una aplicación continua de Δ en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Vamos a probar que P es un espacio fibrado principal de base B y de grupo $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Sea $r : P \times \mathcal{H} \to B$ la aplicación $(U, \xi) \to U\xi$. Es inmediato que esta aplicación es continua. Mostraremos que es abierta. Sean $U_0 \in P$, $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $z_0 = \rho(U_0)$. Consideremos la bola abierta $B(\xi_0, \varepsilon)$ en $\mathcal{H}$. Sea $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$, y $s_1, \ldots, s_n$ son secciones continuas tales que $s_i(z_0) = U_0\xi_i$, Y una vecindad de z_0 en B, y $T_i = T(Y, s_i, \varepsilon)$. A continuación probaremos que $r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1 \ldots, \xi_n) \times B(\xi_0, \varepsilon))$ es una vecindad de $U_0\xi_0$ en E. Sea s_0 una sección continua tal que $s_0(z_0) = U_0\xi_0$; y sea $(t_1(z), \ldots, t_n(z))$ el sistema obtenido por ortonormalizar $(s_1(z), \ldots, s_n(z))$, podemos suponer que los $s_i(z)$ son linealmente independietes para todo $z \in Y$; como $(s_1(z_0), \ldots, s_n(z_0))$ es ortonormal, tenemos que $\|t_i(z) - s_i(z)\| \to 0$ cuando $z \to z_0$, donde $t_i(z) \in T_i$ para z en una vecindad de z_0, y por otro lado

$$\langle t_i(z), s_0(z)\rangle \to \langle s_i(z_0), s_0(z_0)\rangle = \langle \xi_i, \xi_0\rangle .$$

Por lo tanto, si $\varepsilon_1 > 0$, existe una vecindad V de $U_0\xi_0$ en E posee la siguiente propiedad: si $\eta \in V$, tenemos $|\|\eta\| - \|\xi_0\|| \leq \varepsilon_1$ y existe en $\mathcal{H}(\pi(\eta))$ un sistema ortonormal $(t_1, \ldots, t_n)$ tal que $t_i \in T_i$ y $|\langle t_i, \eta\rangle - \langle \xi_i, \xi_0\rangle| \leq \varepsilon_1$, $i = 1, \ldots, n$. Si ε_1 es suficientemente pequeño, existe, por lo tanto, un isomorfismo $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}(\pi(\eta))$ que transforma ξ_i en t_i para $i = 1, \ldots, n$, y tal que η sea la imagen para U de un elemento de $B(\xi_0, \varepsilon)$; entonces $U \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, por lo tanto, $\eta \in r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \times B(\xi_0, \varepsilon))$. Así,

$$V \subset r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \times B(\xi_0, \varepsilon)) .$$

Por lo tanto, la aplicación r es abierta. Hemos establecido que E es un espacio fibrado asociado a P.

Tendremos que $\mathcal{E}$ es el haz trivial si, y sólo si P admite una sección continua. La condición necesaria es evidente. Recíprocamente, si P admite una sección continua $z \mapsto U(z)$, y si (ξ_λ) es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, las secciones $z \mapsto U(z)\xi_\lambda$ son continuas; para todo $z \in B$, los $U(z)\xi_\lambda$ forman una base ortonormal de $\mathcal{H}(z)$, por lo tanto, $\mathcal{E}$ es trivial.

Observación 1.2.3. *Supongamos que $\mathcal{E}$ es de rango a, finito. Entonces $\mathcal{E}$ es localmente trivial, como resultado de la ortonormalización. En generl, $\mathcal{E}$ no es trivial; la teoría de espacios fibrados proporciona numerosos ejemplos. Aun así, si por ejemplo B, es paracompacto y contraíble, entonces P es trivial, y por lo tanto, $\mathcal{E}$ es trivial.*

En el caso en el que $\mathcal{E}$ sea de rango infinito, veremos que la situación es muy diferente.

1.2.3. Primer teorema de trivialidad

Lema 1.2.1. *Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son espacios de Hilbert de dimensión infinita, entonces existe un isomorfismo isométrico*

$$\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'.$$

Demostración. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ espacios de Hilbert de dimensión infinita. Sea $\{e_1, e_2, \ldots\}$ una base ortnormal de $\mathcal{H}$ y sea $\{e_1', e_2', \ldots\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}'$. Consideremos la aplicación $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tal que $\psi(e_k) = e_k'$, así es lineal y biyectiva. Sea

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

entonces $\psi(f) = g$, donde

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k'.$$

Además,

$$\|\psi f\|_{\mathcal{H}'}^2 = \|g\|_{\mathcal{H}'}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Hemos probado que $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ es un isomorfismo isométrico. En particular, cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita $\mathcal{H}$ es isomorfo a $L^2([0,1])$. ■

Lema 1.2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Existe, para todo $t \in [0,1]$, un subespacio vectorial cerrado $\mathcal{H}_t$ de $\mathcal{H}$ y, para todo $t \in (0,1]$, una aplicación lineal isométrica $U_t : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$, con las siguientes propiedades:*

1. *la proyección $P_t = P_{\mathcal{H}_t}$ es una función fuertemente continua de $t \in [0,1]$; $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0 = \{0\}$.*
2. *los operadores $U_t P_t, U_t^{-1}$ son funciones fuertemente continuas de $t \in (0,1]$; $U_1 = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H}$ es separable y de dimensión infinita, entonces, por el Lema 1.2.1 podemos identificar $\mathcal{H}$ con $L^2([0,1])$. Sea

$$\mathcal{H}_t = \left\{ f \in L^2([0,1]) : f(x) = 0,\ \ x \geq t \right\}.$$

La propiedad (1) es inmediata. Si $t \in (0,1]$ y $f \in \mathcal{H}_t$, definimos $U_t f \in \mathcal{H}$ por

$$(U_t f)(x) = \sqrt{t} f(tx).$$

Tenemos

$$\|U_t f\|^2 = \int_0^1 t |f(tx)|^2 dx = \int_0^t |f(x')^2 \, dx' = \|f\|^2,$$

vemos que $U_t : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$ es una aplicación lineal isométrica, si $g \in \mathcal{H}$, tenemos, para $0 \leq x \leq t$,

$$\left(U_t^{-1} g\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Sea $f \in \mathcal{H}$, entonces

$$\|U_t P_t f - U_{t'} P_{t'} f\|^2 = \int_0^1 |\sqrt{t} f(tx) - \sqrt{t'} f(t'x)|^2 dx$$

esta última expresión tiende a cero cuando $t' \to t$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|U_t^{-1}f - U_{t'}^{-1}f\|^2 &= 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle U_t^{-1}f, U_{t'}^{-1}f\right\rangle \\ &= 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\int_0^{\text{ínf}(t,t')} \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t'}} \overline{f\left(\frac{x}{t'}\right)} dx';\end{aligned}$$

si por ejemplo, $t \leq t'$, entonces

$$\|U_t^{-1} - U_t^{-1}\|^2 = 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{t'}} f\left(x'\right) \overline{f\left(x' \frac{t}{t'}\right)} dx'$$

expresión que tiende a cero cuando $t' \to t$. ∎

Lema 1.2.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Si $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es dotado con la topología fuerte, entonces $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es contraíble.*

Demostración. Sean H_t, P_t, U_t con las propiedades del Lema 1.2.2. Para $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $t \in (0,1]$, sea

$$\Phi(U,t) = (1 - P_t) + U_t^{-1}UU_tP_t;$$

el operador $\Phi(U,t)$ induce la aplicación identidad en $H \ominus H_t$ e induce en H_t el operador unitario restringido a $U_t^{-1}UU_t$. Por lo tanto, $\Phi(U,t) \in G$, y $\Phi(U,1) = U$. Tenemos $\Phi(U,0) = Id$. Es suficiente probar que la aplicación Φ de $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \times [0,1]$ en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es continua. Sobre $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \times (0,1]$, esto resulta del Lema 1.2.2. Por otro lado, supongamos que $(U',t') \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times (0,1]$ tiende hacia $(U,0) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \times [0,1]$. Entonces $P_{t'}$ tiende fuertemente a cero, y, para toda $f \in H$, $\|U_{t'}^{-1}UU_{t'}P_{t'}f\| = \|P_{t'}f\| \to 0$, por lo tanto, $\Phi(U',t')$ tiende fuertemente a $1 = \Phi(U,0)$. ∎

Lema 1.2.4. *Sean E un espacio total localmente trivial, F su fibra, B su espacio base. Supongamos que F es contraíble y B paracompacto. Entonces, $\mathscr{F}$ el haz de gérmenes de secciones continuas de E, es suave. En particular, E admite una sección continua definida sobre B.*

Demostración. Sean $b \in B$ y U una vecindad abierta de b tal que E es trivial en U. Sea V un subconjunto cerrado de B contenido en U y s una sección de $\mathcal{F}$ en V. Sabemos que podemos extender s a una vecindad de V; es decir, s está definida para una sección continua t de E en una vecindad V' de V, que podemos suponer contenida en U. Las secciones continuas de E en U se identifican con aplicaciones continuas de U en F. Sea V'' una vecindad de V tal que $\overline{V''} \subset V'$. Luego, $t'|_{V''}$ se extiende a una sección continua de E en U. Esta sección define una sección continua de $\mathcal{F}$ en U que se extiende a s. ∎

Teorema 1.2.1. *Sea $\mathcal{E}$ un haz continuo de espacios de Hilbert sobre B, de rango infinito. Si $\mathcal{E}$ es localmente trivial y B es paracompacto, entonces $\mathcal{E}$ es trivial.*

Demostración. Sea P el espacio fibrado principal construido a partir de $\mathcal{E}$. Como $\mathcal{E}$ es localmente trivial, P es localmente trivial. Y como $\mathcal{E}$ es de rango infinito, el grupo P es contraíble, por el lema 2.2. Por el lema 2.3, P admite una sección continua definida sobre B. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ es trivial. ∎

1.2.4. Grassmannianas infinitas

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{H}) := \{p : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : p^2 = p,\ p^* = p\}.$$

S a $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})$ le damos la topología uniforme, obtenemos un espacio metrizable $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$. Si le damos la topología fuerte, obtenemos un espacio topológico $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ que es metrizable si $\dim \mathcal{H} \leq \infty$. Diremos que $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$ y $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ son la grassmanniana uniforme y la grassmanniana fuerte, respectivamente, de $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{E}_0$ el haz producto sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$ definido por $\mathcal{H}$. Para todo $z \in G_u$, definimos $z\,(\mathcal{H}) = \mathcal{H}\,(z)$. Entonces los $\mathcal{H}\,(z)$ definen un subhaz $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}_0$. En efecto, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, la aplicación $z \mapsto z\,(\xi)$ es una sección relativa a $\mathcal{E}_0$ y $z\,(\xi) \in \mathcal{H}\,(z)$ para toda $z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$, lo cual demuestra nuestra afirmación. Además si $\dim \mathcal{H} \leq \infty$, entonces $\mathcal{E}$ es separable. Diremos que $\mathcal{E}$ es el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$. Observemos que la familia de espacios $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}\,(z)$ definen un subhaz $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_0$ y que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$.

Análogamente, sea $\mathcal{D}_0$ el haz constante sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ definido por $\mathcal{H}$. La familia de espacios $\mathcal{H}\,(z)$ y los $\mathcal{E}\ominus\mathcal{H}\,(z)$ definen subhaces $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}_0$, tales que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}\oplus\mathcal{D}'$. Diremos que $\mathcal{D}$ es el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$.

Si $\dim \mathcal{H} \leq \infty$, el haz es separable. Los haces $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las imágenenes inversas de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$, respectivamente, mediante la aplicación identidad $i : \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$.

Si Y es un subconjunto de $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$, $\mathcal{E}|_Y$ es el subhaz del haz constante sobre Y correspondiente a $\mathcal{H}$ definido por los $\mathcal{H}\,(z)$, i. e., las secciones de $\mathcal{E}|_Y$ son las aplicaciones continuas $s : Y \to \mathcal{H}$ tales que $s\,(z) \in \mathcal{H}\,(z)$ para todo $z \in Y$. Tenemos un resultado análogo para $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$.

Sean B un espacio topológico, $\mathscr{H}_0$ el haz constante sobre B definido por $\mathcal{H}$. Sea $\mathscr{H} = ((K\,(z))\,, \Gamma)$ un subhaz que es un sumando directo de $\mathscr{H}_0$. Definamos, para todo $z \in B$, $\varphi\,(z) = P_{K(z)} \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$. Por la Proposición 21, $\varphi : B \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ es una aplicación continua. Para todo $z \in B$, tenemos que $K\,(z) = \mathcal{H}\,(\varphi\,(z))$. Sea s una sección continua relativa a $\mathcal{D}$; entonces $z \mapsto s\,(\varphi\,(z))$ es una aplicación continua de B en $\mathcal{H}$ tal que $s\,(\varphi\,(z)) \in K\,(z)$ para todo $z \in B$, por lo tanto es una sección continua relativa a $\mathscr{H}$. Sea $\mathscr{H}' = ((K\,(z))\,, \Gamma')$. De aquí, se concluye que existe un conjunto $\Delta \subset \Gamma \cap \Gamma'$ que es total relativamente a $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$. Por lo tanto, las aplicaciones identidad de $K\,(z)$ definen un isomorfismo de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}'$. De esta manera, podemos identificar a $\mathscr{H}$ con el pull-back $\varphi^*\,(\mathcal{D})$.

Teorema 1.2.2. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$ la grassmanniana uniforme de $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$ el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$, $B = \{z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u : \mathrm{rango}\,(z) = \infty\}$. Entonces $\mathcal{E}|_B$ es trivial.*

Demostración. El espacio B, al ser un subespacio de $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u$, es metrizable, y por lo tanto, paracompacto. Por el Teorema 1.2.1, es suficiente probar que $\mathcal{E}|_B$ es trivial. Sea $z_0 \in B$. Sea

$$B' = \{z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_u : \|z - z_0\| < 1\}\,;$$

para $z \in B'$, la restricción T_z de z a $\mathcal{H}\,(z_0)$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}\,(z_0)$ en $\mathcal{H}\,(z)$, $z \in B$. La aplicación $z \mapsto zz_0$ es continua en la topología uniforme, y por lo tanto también lo es la aplicación $z \mapsto T_z$, se sigue que las funciones $z \mapsto \|T_z\|$, $z \mapsto \|T_z^{-1}\|$ son continuas. El operador adjunto de T_z es $z_0|_{\mathcal{H}(z)}$, luego, para $\xi \in \mathcal{H}(z)$ y $\xi_0 \in \mathcal{H}(z_0)$, tenemos

$$\langle z\xi_0, \xi\rangle = \langle \xi_0, \xi\rangle = \langle \xi_0, z_0\xi\rangle .$$

Cuando $z \mapsto u(z)$ es una aplicación continua de B' en $\mathcal{H}$ tal que $u(z) \in \mathcal{H}_0$ para todo $z \in B'$, entonces $z \mapsto T_z u(z)$ y $z \mapsto T_z^*(z)$, son apliciones continuas de B' en $\mathcal{H}$. En consecuencia, $(T_z)_{z\in B'}$ es un isomorfismo en sentido débil de $\mathscr{H}$, el haz constante sobre B' definido por $\mathcal{H}(z_0)$, sobre $\mathcal{E}|_{B'}$, y este isomorfismo es adjuntable.

■

Lema 1.2.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y B el conjunto de proyecciones de rango finito en $\mathcal{H}$. Entonces, las topologías fuerte y uniforme coinciden en B.*

Demostración. Sean $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ una base ortonormal de $z_0(\mathcal{H})$. Si $z \in B$ y suficientemente cerca de z_0 en la topología fuerte, $\|z\xi_i - \xi_i\|$ es muy pequeño, y los $z\xi_i$ son una base de $z(\mathcal{H})$, si ortonormalizamos los $z\xi_i$, vemos que existe una vecindad fuerte V de z_0 en B tal que, si $z \in V$, existe en $z(\mathcal{H})$ una base ortonormal $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ tal que $\|\eta_i - \xi_i\| \leq \varepsilon$. Sea $\xi \in \mathcal{H}$ con $\|\xi\| \leq 1$. Tenemos que, para todo $z \in V$,

$$\begin{aligned}
\|z\xi - z_0\xi\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle \xi, \eta_i\rangle \eta_i - \langle \xi, \xi_i\rangle \xi_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle \xi, \eta_i\rangle \eta_i - \langle \xi, \eta_i\rangle \xi_i + \langle \xi, \eta_i\rangle \xi_i - \langle \xi, \xi_i\rangle \xi_i\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \| \langle \xi, \eta_i\rangle \eta_i - \langle \xi, \eta_i\rangle \| + \sum_{i=1}^{n} \| \langle \xi, \eta_i\rangle \xi_i - \langle \xi, \xi_i\rangle \xi_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \| \langle \xi, \eta_i\rangle (\eta_i - \xi_i) \| + \sum_{i=1}^{n} \| \langle \xi, \eta_i - \xi_i\rangle \xi_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} | \langle \xi, \eta_i\rangle | \|\eta_i - \xi_i\| + \sum_{i=1}^{n} | \langle \xi, \eta_i - \xi_i\rangle | \|\xi_i\| \\
&\leq 2n\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.2.6. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ la grassmanniana fuerte de $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$,*

$$Y = \{z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f : \mathit{codim}\,(z(\mathcal{H})) = n < \infty\} .$$

Entonces $\mathcal{D}|_Y$ es trivial.

Demostración. Por el Teorema 1.2.2, existe para todo $z \in Y$ una base ortonormal $(\xi_i(z))_{i\in I}$ de $z(\mathcal{H})$ tal que las aplicaciones $z \mapsto \xi_i(z)$ de Y en $\mathcal{H}$ son continuas en la topología uniforme. Por el Lema 1.2.5, la topología uniforme coincide con la topología fuerte en Y, pues la aplicación $z \mapsto 1 - z$ es un homeomorfismo, para las topologías uniforme y fuerte de Y en el conjunto de las proyecciones de rango n de $\mathcal{H}$. Por lo tato, las aplicaciones $z \mapsto \xi_i(z)$ son secciones continuas relativas a $\mathcal{D}|_Y$. ■

Proposición 23. *Sean $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert, $\mathcal{E}'$ un sub-haz de $\mathcal{E}$, de rango finito n. Si $\mathcal{E}$ es trivial de rango infinito, entonces $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$ es trivial.*

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{E}$ es el haz constante sobre B definido por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita. Para todo subespacio vectorial cerrado K de $\mathcal{H}$ de codimensión n, sea $(\xi_i(K))_{i\in I}$ una base ortonormal de K tal que las aplicaciones $P_K \to \xi_i(K)$ son continuas en la topología fuerte, Lema 1.2.6. Para todo $z \in B$, sea $K(z)$ el espacio de Hilbert asociado a z en el haz $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$. La aplicación $z \mapsto P_{K(z)}$ es fuertemente continua, por lo tanto las aplicaciones $z \mapsto \xi_i(K(z))$ son continuas, y para todo $z \in B$, los $\xi_i(K(z))$ constituyen una base ortonormal de $K(z)$. ■

1.2.5. Segundo teorema de trivialidad

Lema 1.2.7. *Sean $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert sobre B, Y un subconjunto cerrado de B, s una sección que no se anula en Y. Supongamos que $\mathcal{E}$ es trivial y de rango inifito, B paracompacto. Entonces s se extiende a una sección que no se anula en B.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{E}$ es el haz constante definido por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita. Sea s' una extensión continua de s a B. El conjunto $\{z \in B : s'(z) \neq 0\}$ es una vecindad abierta de Y. El espacio $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ es contraíble, por [8]. Por [7], Teorema 1, existe una aplicación continua de B en $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ que coincide con s' en Y. ■

Lema 1.2.8. *Sean $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert sobre B, Y un subconjunto cerrado de B y s es una sección no nula en Y. Supongamos que B es paracompacto, $\mathcal{E}$ de rango inifito, y además, supongamos que $\mathcal{E}$ es trivial sobre $B_1, B_2 \setminus B_1, B_3 \setminus B_2, \ldots$, donde $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de B tales que*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = B.$$

Entonces s se extiende a una sección no nula sobre B.

Demostración. Supongamos que contruimos una vecindad cerrada V_n de $Y \cup B_n$ en B y una sección continua s_n no nula en V_n que se extiende a s. Sea $W_n = V_n^\circ$. Entonces $B_{n+1} \cap (V_n \setminus W_n)$ es un subconjunto cerrado de $B_{n+1} \cap (B \setminus W_n)$, y $\mathcal{E}|_{B_{n+1}\cap(B\setminus W_n)}$ es trivial. Por el Lema 1.2.7, existe una sección no nula s_n' en

$B_{n+1} \cap (B \setminus W_n)$ que coincide con s_n en $B_{n+1} \cap (V_n \setminus W_n)$. Sea s_n'' la sección que coincide con s_n en V_n y con s_n' en $B_{n+1} \cap (B \setminus W_n)$; es continua por la Proposición 8 y no nula en $V_n \cup B_{n+1}$, por construcción, luego por la Proposición 7, s_n'' se extiende a una sección continua sobre B; existe una vecindad cerrada V_{n+1} de $V_n \cup B_{n+1}$ en la cual la extensión es no nula. Por lo tanto, podemos construir una vecindad cerrada V_{n+1} de $Y \cup B_{n+1}$ contenida en V_n y una sección continua s_{n+1} no nula en V_{n+1} que se extiende a s_n. Continuando de esta manera, las secciones continuas no nulas en B, s_n así obtenidas se extienden a s. ∎

Lema 1.2.9. *Sean $\mathcal{E}$, $B, B_1, B_2, \ldots$ como en el Lema 1.2.8. Sean s_0 una sección continua en B y $\varepsilon > 0$. Existe una sección continua no nula s en B tal que*

$$\|s(z) - s_0(z)\| \leq \varepsilon$$

en B.

Demostración. Sea $Y = \{z \in B : \|s_0(z)\| \geq \varepsilon/2\}$ un conjunto cerrado de B. Sea t una sección continua no nula sobre B que extiende a $s_0|_Y$, por el Lema 1.2.8. Digamos que $t'(z) = \|t(z)\|^{-1} t(z)$. Tenemos que $\|t'(z)\| = 1$, y $s_0(z) = \|s_0(z)\| t'(z)$ en Y. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \|s_0(z)\| & \text{sí} \quad z \in Y \\ \varepsilon/2 & \text{sí} \quad z \in B \setminus Y \end{cases};$$

como $\|s_0(z)\| = \varepsilon/2$ es todo punto de ∂Y, f es continua. Sea $s(z) = f(z) t'(z)$. Entonces s es una sección continua, $s(z) \neq 0$, $s(z) = s_0(z)$ si $z \in Y$, y

$$\begin{aligned} \|s(z) - s_0(z)\| &\leq \|f(z) t'(z)\| \\ &\leq \|f(z) t'(z)\| + \|s_0(z)\| \\ &\leq \|f(z)\| \|t'(z)\| + \|s_0(z)\| \\ &\leq \|f(z)\| + \|s_0(z)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

∎

Observación 1.2.4. *En los tres lemas anteriores, podemos reemplazar la hipótesis de ser espacios de Hilbert por la hipótesis de ser espacios de Banach; en efecto, la esfera unitaria en un espacio de Banach de dimensión infinita es contraíble, tal y como se puede ver en [3].*

Lema 1.2.10. *Sean $\mathcal{E}, B, B_1, B_2, \ldots$ como en el Lema 1.2.8. Sean $\{s_1, \ldots, s_n\}$ un conjunto de secciones continuas ortonormales en B, t una sección continua y $\varepsilon > 0$. Existe una sección continua s_{n+1} con las siguientes propiedades:*

1. *$\{s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}\}$ son ortonormales en B;*

2. *existen funciones continuas* $f_i : B \to \mathbb{C}$ *con* $i = 1, 2, \ldots, n+1$*; tales que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z)\, s_i(z) - t(z) \right\| \leq \varepsilon$$

en B.

Demostración. Para todo $z \in B$, sean $\mathcal{H}(z)$ el espacio de Hilbert asociado a z en $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}'(z) = \langle s_1(z), s_2(z), \ldots, s_n(z) \rangle$ y $\mathcal{H}''(z) = \mathcal{H}(z) \ominus \mathcal{H}'(z)$. Los $\mathcal{H}'(z)$ definen un subhaz $\mathcal{E}'$ que es un sumando directo de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'|_{B_1}, \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'|_{B_2 \setminus B_1}, \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'|_{B_3 \setminus B_2}, \ldots$ son triviales, por la Proposición 22. Sea $t'(z) = P_{\mathcal{H}''(z)} t(z)$. Por el Lema 1.2.9 aplicado a $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$ y a t, existe una sección s no nula relativa a $\mathcal{E}''$ tal que $\|s(z) - t'(z)\| < \varepsilon$ para toda z. Digamos que $s_{n+1}(z) = \|s(z)\|^{-1} s(z)$, y de esta manera tenemos la primera parte del lema. Por otro lado, si tomamos $f_i(z) = \langle t(z), s_i(z) \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z)\, s_i(z) - t(z) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle t(z), s_i(z) \rangle\, s_i(z) + \|s(z)\| s_{n+1}(z) - t(z) \right\| \\
&= \|t(z) - t'(z) + s(z) - t(z)\| \\
&= \|s(z) - t'(z)\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.3. *Sea* $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ *un haz de espacios de Hilbert sobre* B*, separable y de rango infinito. Sea* $(B_1, B_2, \ldots)$ *una familia creciente de conjuntos cerrados de* B*, cuya unión es* B*. Supongamos que* $\mathcal{E}$ *es trivial sobre* $B_1, B_2 \setminus B_1, B_3 \setminus B_2, \ldots$*. Entonces* $\mathcal{E}$ *es trivial.*

Demostración. Sea $(t_1, t_2, \ldots)$ un conjunto de elementos de Γ tales que, para todo $z \in B$, los $t_i(z)$ son densos en $\mathcal{H}(z)$. Por el Lema 1.2.10, podemos construir por recurrencia un conjunto $(s_1, s_2, \ldots,)$ de elementos de Γ con las propiedades siguientes:

(i) para todo $z \in B$, la familia $(s_i(z))_{i \in I}$ es ortonormal;

(ii) existen funciones $f_{in} : B \to \mathbb{C}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_{in}(z)\, s_i(z) - t_n(z) \right\| \leq \frac{1}{n}$$

en B.

Para todo $z \in B$, las combinaciones lineales de los $s_i(z)$ son densas en $\mathcal{H}(z)$, por lo tanto $\{s_1(z), s_2(z), \ldots,\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}(z)$. ■

Corolario 1.2.1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita,* $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ *la grassmanniana fuerte de $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ el haz canónico sobre* $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$*,*

$$B = \{z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f : \mathit{codim}\,(z\,(\mathcal{H})) < \infty\}\,.$$

Entonces $\mathcal{D}|_B$ es trivial.

Demostración. Hemos visto que $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ es un espacio metrizable, y por lo tanto, B es paracompacto. Sea $Y_n = \{z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f : \mathrm{codim}\,(z\,(\mathcal{H})) = n\}$. Entonces $\mathcal{D}|_{Y_n}$ es trivial, por el Lema 1.2.5. El haz $\mathcal{D}|_B$ es separable y de rango infinito. El conjunto de las proyecciones de rango menor o igual a n, con n finito, es cerrado en $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$, i. e., $Y_0 \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ es cerrado en $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$. Por el Teorema 1.2.3, $\mathcal{D}|_B$ es trivial. ∎

Corolario 1.2.2. *Sea $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert sobre B, separable y de rango infinito. Sea $(B_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$ una familia bien ordenada creciente de conjuntos abiertos paracompactos de B tales que $B_0 = \varnothing$, $B_\lambda = B$, y*

$$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$$

cuando α es un ordinal límite. Supongamos que $\mathcal{E}$ es trivial en cada $B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$. Entonces $\mathcal{E}$ es trivial.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ un ordinal con $\alpha \leq \lambda$. Supongamos que $\mathcal{E}|_B$ es trival para $\beta < \alpha$. Si α es un ordinal límite, tenemos que

$$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta,$$

por lo tanto $\mathcal{E}|_{B_\alpha}$ es trivial por el Teorema 1.2.1. De lo contrario, tenemos que $\alpha = \alpha' + 1$, y los haces $\mathcal{E}|_{\alpha'}$ y $\mathcal{E}|_{B_\alpha\setminus B_{\alpha'}}$ son triviales, por lo tanto $\mathcal{E}|_{B_\alpha}$ es trivial por el Teorema 1.2.3 aplicado a los conjuntos $B_\alpha \setminus B_{\alpha'}$ y B_α, cerrados en B. Luego aplicamos inducción transfinita. ∎

1.2.6. Suma de un haz arbitrario con un haz trivial

Lema 1.2.11. *Sean $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}\,(z))\,, \Gamma)$ y $\mathcal{E}' = ((\mathcal{H}'\,(z))\,, \Gamma')$ dos haces de Hilbert sobre B, y sea $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = ((\mathcal{H}''\,(z))\,, \Gamma'')$. Supongamos que $\mathcal{E}$ es de rango infinito y B es paracompacto. Sean $s_0 \in \Gamma''$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $s \in \Gamma''$ tal que, para todo $z \in B$, tenemos que $P_{\mathcal{H}(z)} s\,(z) \neq 0$ y $\|s\,(z) - s_0\,(z)\| \leq \varepsilon$.*

Demostración. Sea $t\,(z) = P_{\mathcal{H}(z)} s_0\,(z)$. Tenemos que $t \in \Gamma$. Por el Lema 1.2.9, existe un $t' \in \Gamma$ tal que $t'\,(z) \neq 0$ y $\|t'\,(z) - t\,(z)\| \leq \varepsilon$ en B. Sea

$$s\,(z) = t'\,(z) + P_{\mathcal{H}'(z)} s_0\,(z)\,.$$

Veamos que s verifica las propiedades del lema. En efecto,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}(z)} s(z) &= P_{\mathcal{H}(z)} \left(t'(z) + P_{\mathcal{H}'(z)} s_0(z) \right) \\ &= P_{\mathcal{H}(z)} t'(z) + P_{\mathcal{H}(z)} P_{\mathcal{H}'(z)} s_0(z) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| s(z) - s_0(z) \| &= \| t'(z) + P_{\mathcal{H}'(z)} s_0(z) - s_0(z) \| \\ &= \| t'(z) + s_0(z) - t(z) - s_0(z) \| \\ &= \| t'(z) - t(z) \| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 1.2.12. *Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ y $\mathcal{E}''$ como en el Lema 1.2.11. Sean $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma''$ secciones ortonormales tales que $P_{\mathcal{H}(z)} s_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, son linealmente independientes para todo $z \in B$. Sean $t \in \Gamma''$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $s_{n+1} \in \Gamma''$ con las siguientes propiedades:*

(i) *$s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ son ortonormales en B;*

(ii) *los $P_{\mathcal{H}(z)} s_i(z)$, $i \leq i \leq n+1$, son linealmente independientes para todo z;*

(iii) *existen funciones $f_i : B \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n+1$, continuas tales que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z) s_i(z) - t(z) \right\| \leq \varepsilon$$

en B.

Demostración. Sea $K_1(z) = \left\langle P_{\mathcal{H}(z)} s_1(z), \ldots, P_{\mathcal{H}(z)} s_n(z) \right\rangle$ el subespacio vectorial de $\mathcal{H}(z)$. Como los $P_{\mathcal{H}(z)} s_i(z)$ son linealmente indepedientes, los $K_1(z)$ y los $K(z) = \mathcal{H}(z) \ominus K_1(z)$ definen subhaces $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ tales que $\mathcal{E} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}$ es trivial y de rango infinito. Los $L(z) = \mathcal{H}'(z) \oplus K_1(z)$ definen el subhaz $\mathcal{E}' \oplus \mathcal{D}_1$. Tenemos que $s_1(z), \ldots, s_n(z) \in L(z)$; sea $K'(z)$ el subespacio vectorial de $L(z)$ que es ortogonal con $s_i(z)$; por la Proposición 22, los $K'(z)$ definen un subhaz $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}' \oplus \mathcal{D}_1$. El subespacio vectorial de $\mathcal{H}''(z)$ ortogonal con $s_i(z)$ es $K''(z) = K(z) \oplus K'(z)$; los $K''(z)$ definen el subhaz $\mathcal{D}'' = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$. Tenemos que

$$t''(z) = \sum_{i=1}^{n} \langle t(z), s_i(z) \rangle s_i(z) + t'(z),$$

con $t'(z) \in K(z)$. Por el Lema 1.2.11, aplicado a $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, t' y ε, existe un $s \in \Gamma''$ con las siguientes propiedades:

1. $s(z) \in K''(z)$ para todo z;

2. $P_{K(z)} s(z) \neq 0$ para todo z;

3. $\| s(z) - t'(z) \| \leq \varepsilon$ para todo z.

Si $s_{n+1}(z) = s(z) \| s(z) \|^{-1}$, entonces tenemos (i). Luego, $P_{K(z)} P_{\mathcal{H}(z)} s(z) = P_{K(z)} s(z) \neq 0$, por lo tanto $P_{\mathcal{H}(z)} s(z)$ es linealmente independiente de los $P_{\mathcal{H}(z)} s_i(z)$, en consecuencia, los $P_{\mathcal{H}(z)} s_i(z)$ con $1 \leq i \leq n+1$ son linealmente independientes. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z) s_i(z) - t(z) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle t(z), s_i(z) \rangle s_i(z) + \| s(z) \| s_{n+1}(z) - t(z) \right\| \\
&= \| t(z) - t'(z) + s(z) - t(z) \| \\
&= \| s(z) - t'(z) \| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.4. *Sea $\mathcal{E}'$ un haz de Hilbert separable sobre un espacio topológico paracompacto B. Si $\mathcal{E}$ es un haz trivial de rango infinito sobre B, entonces $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ es isomorfo a $\mathcal{E}$, y por lo tanto, trivial.*

Demostración. Si $\mathcal{E}$ es separable, entonces $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ es separable y el Lema 1.2.12 nos permite construir un conjunto de secciones continuas $s_1, s_2, \ldots$ relativas a $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ tales que en cada punto $z \in B$ forman una base ortonormal para el espacio $\mathcal{H}(z)$. Por lo tanto, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ es isomorfo a $\mathcal{E}$. En el caso más general, podemos escribir $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, donde $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son triviales y $\operatorname{rango}(\mathcal{E}) = \infty$. Entonces $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ es isomorfo a $(\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}_1) \oplus \mathcal{E}_2$ y, por lo tanto $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$. ■

Corolario 1.2.3. *Sea $\mathcal{E}$ un haz de Hilbert separable sobre B paracompacto. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ su grassmanniana fuerte, $\mathcal{D}$ el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$. Entonces existe una aplicación continua*

$$\varphi : B \to \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$$

tal que $\mathcal{E}$ es isomorfo a $\varphi^{-1}(\mathcal{D})$.

Demostración. Sea $\mathcal{E}_1$ el haz constante sobre B definido por $\mathcal{H}$. Por el teorema 1.2.4, podemos suponer que $\mathcal{E}$ es sub-haz que es sumando directo de $\mathcal{E}_1$. El corolario se sigue de... ■

Corolario 1.2.4. *Sean $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ un haz de Hilbert separable sobre B, y $\mathcal{E}' = ((\mathcal{H}'(z)), \Gamma')$ un subhaz de $\mathcal{E}$. Si B es metrizable, entonces $\mathcal{E}'$ es separable.*

Demostración. Sean $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Por el Teorema 1.2.4, podemos suponer que $\mathcal{E}$ es un subhaz del haz constante sobre B definido por $\mathcal{H}_0$. La aplicación $z \mapsto \mathcal{H}'(z)$ de B en el conjunto de subconjuntos cerrados de $\mathcal{H}_0$ es semicontinua inferiormente, por el Corolario 1.2.2. Por [11], existe un conjunto de aplicaciones continuas $s_i : B \to \mathcal{H}_0$ tales que $s_i(z)\,\mathcal{H}'(z)$ para todo z y tales que, para todo z, los $s_i(z)$ son densos en $\mathcal{H}'(z)$. Por lo tanto $\mathcal{E}'$ es separable. ■

Corolario 1.2.5. *Sea $\mathcal{E}$ un haz separable de espacios de Hilbert sobre el espacio paracompacto B. Sea I un conjunto infinito. Para todo $i \in I$, sea $\mathcal{E}_i$ un haz isomorfo a $\mathcal{E}$. Entonces $\oplus_{i\in I}\mathcal{E}_i$ es trivial.*

Demostración. Analizamos el caso en el que I es numerable. Por el Teorema 1.2.1, es suficiente probar que $\oplus_{i\in I}\mathcal{E}_i$ es localmente trivial. Podemos suponer que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$$

, donde $\mathcal{E}'$ es trivial de rango 1. Entonces $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}'_i \oplus \mathcal{E}''_i$ donde $\mathcal{E}'_i$ es trivial de rango 1 y $\mathcal{E}''_i$ es isomorfo a $\mathcal{E}''$. Por lo tanto

$$\bigoplus_{i\in I}\mathcal{E}_i \cong \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{E}'_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{E}''_i\right).$$

Como $\oplus_{i\in I}\mathcal{E}''_i$ es separable, y $\oplus_{i\in I}\mathcal{E}'_i$ es trivial de rango infinito. El corolario se sigue ahora del Teorema 1.2.4. ■

1.2.7. Tercer teorema de trivialidad

Recordemos que una cubierta abierta de un espacio topológico X es una familia de abiertos $(Y_i)_{i\in I}$ tal que

$$\bigcup_{i\in I} Y_i = X.$$

La **hoja** de una cubierta es el número más pequeño n, si existe, tal que cada $x \in X$ está en, al menos, n conjuntos de la cubierta. Un refinamiento $\left(Y'_j\right)_{j\in J}$ de una cubierta $(Y_i)_{i\in I}$ es otra cubierta, donde cada $Y'_j \subset (Y_i)_{i\in I}$ para cada $j \in J$, su hoja puede ser menor que, o posiblemente, mayor que la hoja de $(Y_i)_{i\in I}$. La **dimensión cubriente** de X es definida como el mínimo número n, tal que cada cubierta abierta $(Y_i)_{i\in I}$ de X tiene un refinamiento con hoja, a lo más, $n+1$. Si tal n no existe se dice que X es de dimensión cubriente infinita.

Sea B en espacio paracompacto de dimensión finita menor o igual a n. Sean A un subconjunto cerrado de B, Y un espacio métrico completo y φ una aplicación semicontinua inferiormente de B en el conjunto de subconjuntos cerrados no vacíos de Y. Supongamos que para todo $z \in B$, $\varphi(z)$ es contraíble. Supongamos la existencia de un $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $z \in B$ y toda bola abierta $B(z, \varepsilon_0)$ en Y, $\varphi(z) \cap B(z, \varepsilon_0)$ es contraíble. Entonces, si $f : A \to Y$ es una aplicación continua tal que $f(z) \in \varphi(z)$ para todo $z \in Y$, entonces f se extiende a una aplicación continua $f' : B \to Y$ tal que $f'(z) \in \varphi(z)$ para todo $z \in B$.

Teorema 1.2.5. *Sea* $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ *un haz separable de Hilbert sobre* B*, con* $\operatorname{rango}(\mathcal{E}) = \infty$*. Si* B *es paracompacto y de dimensión finita, entonces* $\mathcal{E}$ *es trivial.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert con $\dim \mathcal{H}_0 = \infty$. Por el Teorema 1.2.4, podemos suponer que $\mathcal{E}$ es un subhaz de un haz producto definido por $\mathcal{H}_0$ sobre B. Sea $\varphi(z)$ la esfera unitaria en $\mathcal{H}(z)$. El Corolario 1.1.2 implica que φ es una aplicación semicontinua inferiormente de B en el conjunto de conjuntos cerrados no vacíos de $\mathcal{H}_0$. Cada $\varphi(z)$ es contraíble. Luego la intersección de toda $\varphi(z)$ y de toda bola abierta de $\mathcal{H}_0$ es contraíble. Sean A un subconjunto cerrado de B y s una sección continua sobre A, no nula. Entonces la sección $z \mapsto \|s(z)\|^{-1} s(z)$ se extiende a un elemento de Γ de norma 1, por lo tanto, s se extiende a un elemento de Γ no nulo. ∎

1.2.8. Existencia de haces no triviales

Lema 1.2.13. *Sean* $\mathcal{H}_0$ *un espacio de Hilbert de dimensión* 2*,* B *la grassmanniana de subespacios vectoriales de dimensión* 1 *de* $\mathcal{H}_0$*,* X *el espacio fibrado vectorial canónico sobre* B*, de rango* 1*. Sea* $k \in \mathbb{Z}$*,* $k \geq 1$*. El espacio fibrado vectorial* X^k*, de rango* k*, admite a* B^k *como su base. Entonces no existe ninguna sección continua* $s : B^k \to X^k$ *tal que* $s(b) \neq 0$ *para todo* $b \in B^k$*.*

Demostración. La clase de Chern de X es $1+\gamma$, donde γ es un elemento generador de $H^2(B, \mathbb{Z})$. Sean $\pi_1, \ldots, \pi_k$ las proyecciones canónicas de B^k sobre cada uno de sus factores B. Definamos $\pi_i^*(\gamma) = \gamma_i \in H^2\left(B^k, \mathbb{Z}\right)$. El espacio fibrado X^k es el producto fibrado de $\pi_1^*(X), \ldots \pi_k^*(X)$, por lo tanto, su clase de Chern total es $(1+\gamma_1)\cdots(1+\gamma_k)$. Si X^k admite una sección no nula, X^k es el producto fibrado de un espacio fibrado trivial de rango 1, la clase de Chern total es 1, para un espacio fibrado de rango $k-1$, luego la clase total de Chern c no contiene términos de grado mayor a $2k-1$. De esta manera $(1+\gamma_1)\cdots(1+\gamma_k) = 1c$, concluímos que $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k = 0$, lo cual contradice la estructura del anillo $H^*\left(B^k, \mathbb{Z}\right)$. ∎

Teorema 1.2.6. *Sean* $\mathcal{H}_0$ *un espacio de Hilbert de dimensión* 2*,* B *la grassmanniana de los subespacios vectoriales de dimensión* 1 *de* $\mathcal{H}_0$*, definimos* $B^\infty = B \times B \times B \times \cdots$*,* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \cdots$*,* $\mathcal{E}$ *el haz constante sobre* B^∞ *definido por* $\mathcal{H}$*. Para* $b = (b_1, b_2, \ldots) \in B^\infty$*, sea*

$$\mathcal{H}(b) = b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots$$

un espacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$*. Los espacios* $\mathcal{H}(b)$ *definen un subhaz de* $\mathcal{E}$*, sea* $\mathcal{D} = ((\mathcal{H}(b)), \Delta)$*. Entonces* $s \in \Delta$ *se anula, al menos una vez.*

Demostración. La aplicación $b \mapsto P_{\mathcal{H}(b)}$ es fuertemente continua, por lo tanto, los espacios $\mathcal{H}(b)$ definen un subhaz de $\mathcal{E}$. Sea $s \in \Delta$. Tenemos que

$$\begin{aligned} s(b) &= s(b_1, b_2, \ldots) \\ &= s_1(b) + s_2(b) + \cdots \end{aligned}$$

con $s_i(b) \in b_i \subset \mathcal{H}_0$. Sea A_n el conjunto definido por

$$A_n = \{b \in B^\infty : s_1(b) = s_2(b) = \cdots = s_n(b) = 0\}.$$

Para todo $i > n$, fijamos un punto $b_i^0 \in B$. La aplicación

$$(b_1, \ldots, b_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i\left(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}^0, b_{n+2}^0, \ldots\right)$$

se anula, al menos una vez en B^n. Por lo tanto, $A_n \neq \varnothing$. Los A_n son una familia decreciente de conjuntos cerrados de B^∞. Por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \neq \varnothing$. ∎

Corolario 1.2.6. *Sea $I = (0,1)$. Existe sobre el espacio $X = I \times I \times I \times \cdots$ un haz de Hilbert $\mathcal{E}$ separable y de rango infinito, tal que toda sección se anula al menos una vez. En particular, $\mathcal{E}$ es no trivial.*

Demostración. Utilizando la notación del Teorema 1.2.6. Podemos identificar B^∞ como un subespacio cerrado de X. Definimos los espacios $K(b)$ como sigue:

$$K(b) = \begin{cases} \mathcal{H} & \text{sí} \quad b \in X \setminus B^\infty \\ \mathcal{H}(b) & \text{sí} \quad b \in B^\infty \end{cases}.$$

Por el Corolario 1.1.2, los espacios $K(b)$ definen un subhaz $\mathcal{E}$ del haz constante sobre X correspondiente a $\mathcal{H}$. Por el Corolario 1.2.4, $\mathcal{E}$ es separable. Es de rango infinito. Si s es una sección continua relativa a $\mathcal{E}$ sobre X, su restricción a B^∞ se anula al menos una vez. ∎

Corolario 1.2.7. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ su grassmanniana fuerte, $\mathcal{F}$ el haz canónico sobre $\mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$, R es el conjunto de los $z \in \mathrm{Gr}(\mathcal{H})_f$ tales que la dimensión y codimensión de $z(\mathcal{H})$ es infinita.*

1. *Sea $f : R \to \mathcal{H}$ una aplicación continua tal que $f(z) \in z(\mathcal{H})$ para todo z; existe $z_0 \in R$ tal que $f(z) = 0$.*

2. *El haz $\mathcal{F}|_R$ no es localmente trivial en ningún punto de R.*

Demostración. La aplicación $b \mapsto P_{\mathcal{H}(b)}$ del Teorema 1.2.6 es un homeomorfismo $\alpha : B^\infty \to S \subset R$, de manera que $\mathcal{F}|_{\alpha(B^\infty)}$ se puede identificar con el haz $\mathcal{D}$ del Teorema 1.2.6. Entonces (1) se sigue del Teorema 1.2.6.

Ahora veamos que $\mathcal{F}|_R$ no es trivial. Por el Teorema 1.2.1, existe un $z_0 \in R$ tal que $\mathcal{F}|_R$ es localmente no trivial en z_0. Si $z \in R$, existe un operador unitario de $\mathcal{H}$ tal que $z(\mathcal{H}) \mapsto z_0(\mathcal{H})$, por lo tanto $\mathcal{F}|_R$ no es localmente trivial en z. ∎

1.2.9. Otro ejemplo

El Teorema 1.2.4 nos permite plantearnos el siguiente problema: sea $\mathcal{E}$ un haz separable de espacios de Hilbert que admite un subhaz trivial de rango infinito, entonces ¿es trivial? Veremos que la respuesta es negativa.

Sean $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita, B la bola unitaria de $\mathcal{H}_0$ con la topología débil, $\mathscr{H}_0$ el haz constante sobre B definido por $\mathcal{H}_0$. Sea

$$\Gamma_0 = \{s : B \to \mathcal{H}_0 : s \quad \text{es continua}\}$$

. Sea $\mathbb{C}e = \langle e \rangle$ el espacio de Hilbert generado por e, y $\|e\| = 1$. Para todo $z \in B$, damos

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} \mathcal{H}_0 & \text{sí} \quad \|z\| = 1 \\ \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{C}e & \text{sí} \quad \|z\| < 1 \end{cases} ;$$

$$s(z) = z + \left(1 + \|z\|^2\right)^{1/2} e.$$

Sea Λ el conjunto de secciones de la familia $(\mathcal{H}(z))$ de la forma $t + \lambda s$, donde $t \in \Gamma_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. El conjunto Λ verifica la propiedad (T.2), en efecto,

$$\begin{aligned}
\|t(z) + \lambda s(z)\|^2 &= \langle t(z) + \lambda s(z), t(z) + \lambda s(z) \rangle \\
&= \|t(z)\|^2 + |\lambda|^2 \|s(z)\|^2 + \langle t(z), \lambda s(z) \rangle + \langle \lambda s(z), t(z) \rangle \\
&= \|t(z)\|^2 + |\lambda|^2 \|s(z)\|^2 + \langle t(z), \lambda s(z) \rangle + \overline{\langle \lambda s(z), t(z) \rangle} \\
&= \|t(z)\|^2 + |\lambda|^2 + 2\mathrm{Re}\, \langle t(z), \lambda s(z) \rangle .
\end{aligned}$$

Por otro lado, Λ también verifica (T.1). Sea $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ el haz de Hilbert sobre B tal que $\Lambda \subset \Gamma$. Entonces $\mathscr{H}_0$ es un subhaz de $\mathscr{H}$, pues $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Entonces $\mathscr{H}$ es separable. Probaremos que $\mathscr{H}$ no es trivial, y nuestro problema quedará resuelto.

Lema 1.2.14. *No existe ninguna $t \in \Gamma$ tal que $s(z)$ y $t(z)$ sean linealmente independientes para todo $z \in B$.*

Demostración. Por la Proposición 2 y el Corolario 1.1.3, existe $t \in \Gamma$ tal que $s(z)$ y $t(z)$ son linealmente independientes para todo $z \in B$, existe una sección de la forma $t_0 + fs$ con $t_0 \in \Gamma_0$ y $f \in \mathcal{C}(B)$. Entonces $t_0 : B \to \mathcal{H}$ es una aplicación continua tal que:

(i) $\|t_0(z)\| \neq 0$ para todo z;

(ii) $t_0(z) \notin \mathbb{C}z$ para todo z con $\|z\| = 1$.

Definamos para $z \in B$, $u(z) = t_0(z)\|t_0(z)\|^{-1}$. Entonces u es una aplicación continua de B en B. Por el teorema de Shauder-Tychonoff, existe $z_0 \in B$ tal que $u(z_0) = z_0$. Entonces,

$$\|z_0\| = \|u(z_0)\| = 1$$

y

$$t_0(z) = \|t_0(z)\| u(z_0) = \|t_0(z)\| z_0.$$

lo que está en contradicción con (ii). ∎

Proposición 24. *$\mathscr{H}$ no es trivial.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{H}$ es trivial y que el rango de $\mathscr{H}$ es infinito, podemos darle una estructura de haz de Hilbert sobre los cuaternios. Entonces $t(z) = js(z)$ es una sección continua de $\mathscr{H}$ tal que $s(z)$ son linealmente independientes para todo $z \in B$ lo cual contradice el Lema 1.2.14. ∎

1.2.10. Producto tensorial de haces de Hilbert. El haz conjugado

Sean $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ y $\mathcal{E}' = ((\mathcal{H}'(z)), \Gamma')$ dos haces de Hilbert sobre B. Para todo $z \in B$ sea

$$\mathcal{H}''(z) = \mathcal{H}(z) \otimes \mathcal{H}'(z)$$

el producto tensorial de $\mathcal{H}(z)$ y $\mathcal{H}'(z)$. Sea Λ el conjunto de secciones de B que toma valores en $\mathcal{H}''(z)$ de la forma

$$z \mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i(z) \otimes s_i'(z),$$

donde $s_i \in \Gamma$ y $s_i' \in \Gamma'$.

La función,

$$z \mapsto \left\| \sum_{i=1}^{n} s_i(z) \otimes s_i'(z) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle s_i(z), s_j(z) \rangle \left\langle s_i'(z), s_j'(z) \right\rangle$$

es continua. Las condiciones (T.1) y (T.2) se satisfacen. Existen $\mathcal{E}'' = ((\mathcal{H}''(z)), \Gamma'')$ y un único Γ'' tal que $\Lambda \subset \Gamma''$. Escribimos $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$. Si $\mathcal{E}$ es trivial y de rango 1 tenemos que $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' \cong \mathcal{E}'$. Por otro lado, sí

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i \in J} \mathcal{E}_i$$

entonces

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' \cong \left(\bigoplus_{i \in J} \mathcal{E}_i \right) \otimes \mathcal{E}'.$$

Luego, por el Teorema 1.2.4, tenemos la siguiente:

Proposición 25. *Sean B un espacio paracompacto, $\mathcal{E}$ un haz separable de Hilbert sobre B, $\mathcal{E}'$ un haz trivial de Hilbert sobre B de rango infinito. Entonces $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ es isomorfo a $\mathcal{E}$, y por lo tanto trivial.*

Concluímos con la siguiente definición.

Definición 1.2.4. *Si $\mathcal{E} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ es un haz de Hilbert sobre B, y si $\overline{\mathcal{H}(z)}$ denota al espacio conjugado a $\mathcal{H}(z)$, entonces $\left(\left(\overline{\mathcal{H}(z)}\right), \Gamma\right)$ es el haz de Hilbert conjugado a $\mathcal{E}$ y lo denotamos como $\overline{\mathcal{E}}$.*

Capítulo 2

Álgebras C^*

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores compactos lineales acotados en $\mathcal{H}$. Sea $A \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ con la topología inducida por la norma. Además A es tal que cumple las siguientes propiedades:

1. Cerradura bajo la suma;
2. Cerradura bajo la composición;
3. Cerradura bajo la multiplicación por escalares;
4. Cerradura bajo adjunción

Este conjunto A es un tipo especial de álgebra de Banach involutiva, a tal álgebra le llamamos álgebra C^*.

En este capítulo nos centraremos en el estudio de las álgebras C^*, a partir de las cuales construiremos haces, es decir, haces de álgebras C^*, posteriormente estudiaremos las relaciones, locales y globales, entre estos haces de álgebras C^* y los haces de Hilbert.

2.1. Álgebras C^* elementales

En esta sección definiremos las álgebras C^* elementales, un tipo especial de álgebra C^*. Para lograr esto introduciremos varias definiciones previas. Concluiremos la sección con un resultado que nos relaciona la categoría de los espacios de Hilbert con un elemento distinguido x de norma 1 con la categoría de las álgebras C^* elementales con una proyección distinguida de rango 1.

Definición 2.1.1. *Sea A un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Una **involución** en A es una aplicación $A \to A$ dada por $x \mapsto x^*$, esta aplicación es tal que para todos $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:*

1. $(x^*)^* = x$;
2. $(x+y)^* = x^* + y^*$;
3. $(\lambda x) = \overline{\lambda} x^*$;
4. $(xy)^* = y^* x^*$

A un álgebra A con involución la llamaremos ***álgebra involutiva****.*

Definición 2.1.2. *Un álgebra* ***normada involutiva*** *es un álgebra normada A con una involución $x \mapsto x^*$ tal que $\|x^*\| = \|x\|$ para todo $x \in A$. Si además, A es completa, llamaremos a A un álgebra involutiva de Banach.*

Definición 2.1.3. *Un álgebra C^* es un álgebra involutiva de Banach A tal que $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ para todo $x \in A$.*

Definición 2.1.4. *Sea A un álgebra C^*. Diremos que A es* ***elemental*** *si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que A es isomorfo a $\mathcal{K}(\mathcal{H})$*

Otros hechos conocidos son los siguientes:

1. Todo isomorfismo $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ induce un isomorfismo $\overline{\varphi} : A \to A'$.

2. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ espacios de Hilbert separables, y $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $A' = \mathcal{K}(\mathcal{H}')$. Entonces A es isomorfo a A' si, y sólo si $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}')$.

3. Sean $\varphi, \varphi' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ isomorfismos de espacios de Hilbert, entonces φ y φ' inducen el mismo isomorfismo $\overline{\varphi} : A \to A'$ si, y sólo si $\varphi' = \lambda\varphi$ con $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Proposición 26. *El grupo de automorfismos de A,* $\mathrm{Aut}(A)$ *es isomorfo al cociente del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ por su centro, i. e.,*

$$\mathrm{Aut}(A) \cong \mathcal{U}(\mathcal{H}) / Z(\mathcal{U}(\mathcal{H})).$$

Demostración. Una prueba de esto la podemos encontrar en [1]. ■

Recordemos que un operador de Hilbert-Schmidt es un operador acotado T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con la norma dada por:

$$\|T\|_{HS}^2 = \mathrm{Tr}(T^*T) = \sum_{i \in I} \|Te_i\|^2,$$

donde $(e_i)_{i \in I}$ es una base para $\mathcal{H}$ y $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{H}$.

Sea A^0 el conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt de A, este conjunto A^0 es un ideal bilateral denso en A con el siguiente producto escalar

$$(a, b) \mapsto \langle a, b \rangle = \mathrm{Tr}(ab^*) = \mathrm{Tr}(b^*a),$$

es un espacio de Hilbert. Si p es una proyección de rango 1, Ap es un subespacio vectorial cerrado de A^0, y las normas inducidas en Ap por la norma de A^0 y la norma de Hilbert en A^0 coinciden. En efecto, si $a \in A$, entonces

$$(ap)^*(ap) = p^*aap = \lambda p, \qquad \lambda > 0,$$

$$\mathrm{Tr}((ap)^*(ap)) = \lambda = \|(ap)^*(ap)\| = \|ap\|^2.$$

Si la dimensión del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es a, diremos que A es de rango a^2. Análogamente si la dimensión de $\mathcal{H}$ es $a = \infty$, diremos que A es de rango a. Notemos que en el caso finito, esta nueva noción de rango coincide con la usual.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$, y denotamos

$$\alpha(\mathcal{H}, x) := (A, p),$$

donde $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y p es la proyección sobre $\mathbb{C}x$.

Sea A un álgebra C^* elemental, p una proyección de rango 1, y denotamos

$$\beta(A, p) = (\mathcal{H}, x),$$

donde $\mathcal{H} = Ap$ y $x = p$.

Lema 2.1.1. 1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$ y $\|x\| = 1$. Tomemos $\alpha(A, p)$ de tal forma que $\beta(\alpha(\mathcal{H}, x)) = (Ap, p)$. Si para todo $a \in Ap$, $\varphi(a) = ax$, entonces $\varphi : Ap \to \mathcal{H}$ es un isomorfismo tal que $\varphi(p) = x$.*

2. *Sea A un álgebra C^* elemental, $p \in A$ una proyección de rango 1. Tomemos $\beta(A, p) = (\mathcal{H}, x)$ y $\alpha(\mathcal{H}, x) = (A', p')$. Sea $\psi(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal para toda $a \in A$, $\mathcal{H} = Ap$, dada por $\psi(a) y = ay$. Entonces $\psi : A \to A'$ es un isomorfismo tal que $\psi(p) = p'$.*

Demostración.

1. Veamos que φ es lineal,

$$\varphi(\lambda a + b) = (\lambda a + b) x = \lambda ax + bx = \lambda\varphi(a) + \varphi(b).$$

Si $a \in Ap$, entonces $a = ap$, en consecuencia,

$$\mathrm{Tr}(a^* a) = \mathrm{Tr}(pa^* ap) = \langle a^* ax, a\rangle = \|ax\|^2 = \|\varphi(a)\|^2,$$

φ es isométrico, y así $\varphi(p) = p(x) = x$.

2. Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ y un $x_0 \in \mathcal{H}$ con $\|x_0\| = 1$ tal que hay una correspondencia entre (A, p) y $\alpha(\mathcal{H}_0, P_{\mathbb{C}x_0})$. Sea $\varphi_0 : (\mathcal{H}, x) \to (\mathcal{H}_0, x_0)$ el isomorfismo dado en (1). En consecuencia, para todo $a \in A$ y todo $b \in \mathcal{H}$,

$$\varphi_0(\psi(a) b) = \varphi_0(ab) = (ab) x_0 = a(bx_0) = a(\varphi(b)).$$

De esta manera, $\psi(a) = \varphi_0^{-1} a\varphi_0$, y por lo tanto $\psi : A \to A'$ es isomorfismo.

∎

A los isomorfismo φ y ψ les llamaremos **isomorfismo canónicos**.

Observación 2.1.1. *Consideremos las siguientes categorías:*

1. *la categoría de espacios de Hilbert con un elemento distinguido de norma 1;*

2. *la categoría de álgebras C^* elementales con un elemento proyección distinguido de rango 1.*

En ambos casos, sus morfismos son los isomorfismos correspondientes a cada categoría tales que preservan la estructura respectiva. Entonces α y β son funtores para las categorías 1 y 2, respectivamente. Luego por el Lema 2.1.1, existe una equivalencia entre estas categorías.

Observación 2.1.2. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ espacios de Hilbert, $\sigma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un isomorfismo, $\lambda \in \mathbb{C}$ y*

$$L = \{\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{H}' : \tau \in \operatorname{Hom}\left(\mathcal{H}, \mathcal{H}'\right), \tau = \lambda\sigma\}.$$

Sí $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, denotamos por $\langle \lambda\sigma, \mu\sigma\rangle = \lambda\overline{\mu}$, entonces L es un espacio de Hilbert con dimensión compleja 1. Si $\sigma' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es otro isomorfismo distinto de σ, y si además σ y σ' inducen el mismo L, entonces $\sigma' = \theta\sigma$ con $|\theta| = 1$. Por lo tanto,

$$\left\langle \lambda\sigma', \mu\sigma'\right\rangle = \langle \lambda\theta\sigma, \mu\theta\sigma\rangle = \lambda\theta\overline{\mu}\overline{\theta} = \lambda\overline{\mu},$$

la estructura de L no depende de la elección de σ. Si $\rho, \rho' \in L$ y si $\xi \in \mathcal{H}$ con $\|\xi\| = 1$, entonces $\langle \rho, \rho'\rangle = \langle \rho(\xi), \rho'(\xi)\rangle$. Es decir, la norma de Hilbert de un elemento de L coincide con su norma como aplicación lineal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}'$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} L \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ (\rho, x) & \mapsto & \rho(x) \end{array}$$

induce una aplicación lineal $\varphi : L \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Posteriormente veremos que φ es un isomorfismo.

2.2. Haces de álgebras C^* elementales

Definición 2.2.1. *Un haz de álgebras C^* sobre un espacio topológico B es un haz de Banach $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ sobre B, donde cada $A(z)$ tiene estructura de álgebra C^*, y Θ es una subálgebra involutiva de $\prod_{z \in B} A(z)$.*

Proposición 27. *Sea $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ un haz de Banach, donde cada $A(z)$ tiene estructura de álgebras C^*. Si existe un subconjunto total de Θ estable bajo el producto y la involución, entonces $\mathcal{A}$ es un haz de álgebras C^*.*

Definición 2.2.2. *Diremos que haz $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ de álgebras C^* es un haz de álgebras C^* elementales si cada $A(z)$ es un álgebra C^* elemental. Además, si cada $A(z)$ es de rango a, diremos que $\mathcal{A}$ es de rango a.*

Cuando hablamos de isomorfismos de haces de álgebras C^*, debemos de entender que hablamos de isomorfismos compatibles con la estructura de álgebra involutiva involucrada en cada fibra. De igual manera, entenderemos las nociones de trivialidad y trivialidad local.

Definición 2.2.3. *Sea $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ un haz de álgebras C^* elementales sobre B. Diremos que $\mathcal{A}$ verifica la* ***condición de Fell*** *si para todo $z_0 \in B$, existe una vecindad Y de z_0, y una sección p de Θ, definida y continua en Y tal que para todo $z \in Y$, $p(z)$ es una proyección de rango 1.*

2.3. Haces de álgebras C^* elementales asociadas a haces de Hilbert

Sea $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ un haz de Hilbert sobre B. Para todo $z \in B$, sea $A(z)$ es álgebra C^* de operadores compactos de $\mathcal{H}(z)$. Sea $\Lambda \subset \prod_{z\in B} A(z)$,

$$\Lambda = \{\theta_{s,t} : s, t \in \Gamma\},$$

donde rango $(\theta_{s,t}) \leq 1$ en $\mathcal{H}(z)$ y está definido por,

$$(\theta_{s,t}(z))(\xi) = \langle \xi, t(z)\rangle s(z).$$

Entonces el subespacio vectorial $\langle\Lambda\rangle$ de $\prod_{z\in B} A(z)$ verifica las condiciones T.1 y T.2 de la Proposición 2. En efecto, todo operador compacto es límite, en norma, de combinaciones lineales de rango 1, se sigue T.1.

Para T.2, observemos que $\|\theta_{s_1,s_2}(z) + \cdots + \theta_{s_{2n-1},s_{2n}}(z)\|$ es una función continua de $\langle s_i(z), s_j(z)\rangle$, por lo tanto, existe un único $\Lambda \subset \Omega$ de tal forma que $\mathcal{A} = ((A(z)), \Omega)$ es un haz de Banach sobre B. Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle(\theta_{t,s}(z))(x), y\rangle &= \langle\langle x, s(z)\rangle t(z), y\rangle \\
&= \langle x, s(z)\rangle \langle t(z), y\rangle \\
&= \left\langle x, \overline{\langle y, t(z)\rangle} s(z)\right\rangle \\
&= \langle x, (\theta_{s,t}(z))^* (y)\rangle \\
\theta_{t,s} &= \theta^*_{s,t};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\theta_{s,t}(z))\left(\left(\theta_{s',t'}(z)\right)(\xi)\right) &= \left\langle\left\langle \xi, t'(z)\right\rangle s'(z), t(z)\right\rangle s(z) \\
&= \left\langle \xi, t'(z)\right\rangle \left\langle s'(z), t(z)\right\rangle s(z) \\
&= \left\langle s'(z), t(z)\right\rangle \left\langle \xi, t'(z)\right\rangle s(z) \\
&= \left\langle s'(z), t(z)\right\rangle \left(\theta_{s,t'}(z)\right)(\xi) \\
\theta_{s,t}\theta_{s',t'} &= \left\langle s', t\right\rangle \theta_{s,t'}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathcal{A}$ es un haz de álgebras C^* elementales sobre B.

Diremos que $\mathcal{A}$ es el haz asociado a $\mathscr{H}$, y lo denotaremos por $\mathcal{A}(\mathscr{H})$. Notemos que $\mathscr{H}$ es separable, entonces $\mathcal{A}$ es separable.

Proposición 28. *Sea $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ un haz de Hilbert sobre B y sea*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathscr{H}) = ((A(z)), \Theta)$$

su haz asociado. Entonces

1. *Todo elemento a de Θ es un homomorfismo $a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$;*

2. *sean $a \in \Theta$, $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen una vecindad Y de z_0, $n \in \mathbb{Z}$ y un homomorfismo $p = (p(z))_{z\in Y} : \mathscr{H}|_Y \to \mathscr{H}|_Y$ tal que cada $p(z)$ es una proyección de rango n que cumple:*

$$\|p(z)\, a(z)\, p(z) - a(z)\| \leq \varepsilon;$$

3. *sea a una sección de Θ de norma localmente acotada. Supongamos que para todo z_0 en B y para todo $\varepsilon > 0$ la condición (2) se verifica. Además supongamos que para todo s y t en Γ, la función*

$$\begin{array}{ccc} B & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \langle a(z)\, s(z), t(z)\rangle \end{array}$$

es continua. Entonces $a \in \Theta$.

Demostración.

1. Si $a \in \Theta$, la función $\|a\|$ es localmente acotada. Si $a \in \Lambda$, $a : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un homomorfismo, por la Proposición 5. Por la Proposición 1, todo $a \in \Theta$ es límite, en la convergencia uniforme, de secciones de $\langle\Lambda\rangle$. Por lo tanto, $a : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un homomorfismo.

2. Sean $a \in \Theta$, $z_0 \in B$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $a(z_0)$ es de rango finito, por lo tanto, existe una sucesión ortonormal $(\xi_i)_{i=1}^n$ de $\mathcal{H}(z_0)$ tal que

$$p_0 a(z_0)\, p = a(z_0)$$

, donde p_0 es la proyección ortogonal sobre $\mathbb{C}\xi_1 + \cdots + \mathbb{C}\xi_n$. Sean Y_1 una vecindad de z_0 y $(s_i)_{i=1}^n$ secciones continuas ortonormales en Y_1 tal que $s_i(z_0) = \xi_i$. Sea $p(z)$ la proyección ortogonal sobre $\mathbb{C}s_1(z) + \cdots \mathbb{C}s_n(z)$ en $\mathcal{H}(z)$. Entonces $p = (p(z))_{z\in Y_1} : \mathscr{H}|_{Y_1} \to \mathscr{H}|_{Y_1}$ es un un homomorfismo, y $p(z_0)\, a(z_0)\, p(z_0) = a(z_0)$, en consecuencia $\|p(z)\, a(z)\, p(z) - a(z)\| \leq \varepsilon$ en una vecindad Y de z_0.

3. Sea a una sección relativa a $\mathcal{A}$ que verifica que verifica las hipótesis de (3). Luego toda $b \in \Theta$ verifica las hipótesis de (3), de igual manera $a - b$, por lo tanto la función $z \mapsto \|a(z) - b(z)\|$ es continua. Se sigue que $a \in \Theta$.

■

2.4. Relaciones entre haces de Hilbert y haces de álgebras C^*. Resultados locales

Sea B un espacio topológico. Sea $\mathscr{H}$ un haz de Hilbert sobre B con una sección s tal que $\|s\| = 1$. Definamos $\alpha(\mathscr{H}, s) := (\mathcal{A}, p)$, donde $\mathcal{A}$ es el haz asociado a $\mathscr{H}$ de álgebras C^* elementales y donde $p = \theta_{s,s}$.

Sea $\mathcal{A}$ un haz de álgebras C^* elementales sobre B con una sección p de manera que para cada z, $p(z)$ es una proyección de rango 1. Definimos $\beta(\mathcal{A}, p) = (\mathscr{H}, s)$, donde $\mathscr{H}$ y s están definidos de la siguiente manera: sea $\varphi_z : A(z) \to A(z)$, dada por $a \mapsto ap(z)$, entonces $\varphi := (\varphi_z)_{z\in B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un homomorfismo de espacios de Banach, sea $\mathcal{H}(z) = \varphi_z(A(z))$ el subespacio vectorial cerrado $A(z)p(z)$ de $A(z)$, el cual es un espacio de Hilbert; los espacios $\mathcal{H}(z)$ definen un subhaz $\mathscr{H}$ de $\mathcal{A}$, y $\mathscr{H}$ es, por lo tanto, un haz de Hilbert sobre B. Por otro lado, sea $s = p$ de tal manera que s es una sección relativa a $\mathscr{H}$, y es tal que $\|s\| = 1$. Luego, si $\mathcal{A}$ es separable, entonces $\mathscr{H}$ es separable.

Lema 2.4.1. 1. *Sean $\mathscr{H}$ un haz de Hilbert sobre B con una sección s tal que $\|s\| = 1$ y $(\mathscr{H}', s') = \beta(\alpha(\mathscr{H}, s))$. Sean $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$, para todo $z \in B$, sea $\varphi_z : \mathcal{H}'(z) \to \mathcal{H}(z)$ el isomorfismo canónico. Entonces*

$$\varphi := (\varphi_z) : \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$$

es un isomorfismo tal que $\varphi(s') = s$.

2. *Sean $\mathcal{A}$ un haz de álgebras C^* elementales sobre B con una sección p, de tal forma que para cada $z \in B$, $p(z)$ es una proyección de rango 1, y*

$$\left(\mathcal{A}', p'\right) = \alpha(\beta(\mathcal{A}, p)).$$

Sean $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ y $\mathcal{A}' = ((A(z)), \Theta')$, para todo $z \in B$, sea $\psi_z : A(z) \to A'(z)$. Entonces $\psi := (\psi_z)_{z\in B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tal que $\psi(p) = p'$.

Demostración.

1. Sean $t \in \Gamma$ y $t' = \theta_{t,s} \in \Gamma'$, entonces

$$\varphi_z\left(t'(z)\right) = \theta_{t,s}(z)\, s(z) = t(z).$$

Luego, $\varphi^{-1}(t) = t'$, de esta manera $\varphi : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ es un isomorfismo, y en consecuencia $\varphi(s') = s$.

2. Para probar que $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un isomorfismo, mostraremos que $\psi(a) \in \Theta'$ para todo a de la forma $a'pa''$, donde $a', a'' \in \Theta$. En efecto, el conjunto

$$\{s \in \Theta : s = a'pa''\}$$

es total de Θ. Pero si, $a = a'pa''$, $\psi(a)$ es la sección de $\mathcal{A}'$ que en el valor z es el operador $\gamma p(z)$, $\gamma \in A(z)$, asocia

$$\begin{aligned} a'(z)\, p(z)\, a''(z)\, \gamma p(z) &= a'(z) \operatorname{Tr}\left(p(z)\, a''(z)\, \gamma p(z)\right) p(z) \\ &= \left\langle \gamma p(z), a''^*(z)\, p(z) \right\rangle a'(z)\, p(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(a) \in \Theta'$.

∎

Observación 2.4.1. *Consideremos las siguientes categorías:*

1. *la categoría de haces de Hilbert con una sección s tal que $\|s\| = 1$;*
2. *la categoría de haces de álgebras C^* elementales sobre B con una sección de proyecciones de rango 1.*

Entonces, α y β son funtores en las categorías 1 y 2, respectivamente. Luego, por el Lema 2.4.1, hay una equivalencia entre estas categorías.

Teorema 2.4.1. *Sean B un espacio topológico, $\mathcal{A}$ un haz de álgebras C^* elementales sobre B. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para todo $z_0 \in B$, existe una vecindad Y de z_0 en B y un haz $\mathscr{H}$ de Hilbert sobre Y, con $\mathcal{H}(z) \neq 0$ para todo $z \in Y$ tal que $\mathcal{A}|_Y$ es isomorfo a $\mathcal{A}(\mathscr{H})$;*
2. *$\mathcal{A}$ verifica la condición de Fell.*

Demostración. Supongamos (1). Sea $z_0 \in B$. Sean Y_0 una vecindad de z_0 y $\mathscr{H}$ un haz de Hilbert no nulo sobre Y_0 tal que $\mathcal{A}|_{Y_0}$ es isomorfo a $\mathcal{A}(\mathscr{H})$. Sea $\xi \neq 0$ en $\mathcal{H}(z_0)$. Sea s una sección continua de $\mathscr{H}$ tal que $s(z_0) = \xi$. Definamos

$$Y := \{z \in Y_0 : s(z) \neq 0\},$$

una vecindad de z_0, luego $t(z) = \|s(z)\|^{-1} s(z)$ para todo $z \in Y$. La sección $\theta_{t,t}$ de $\mathcal{A}(\mathscr{H})$ definida sobre Y, es una sección continua en Y, y $\theta_{t,t}(z)$ es una proyección de rango 1 para todo $z \in Y$, en consecuencia se satisface la condición de Fell.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}$ cumple la condición de Fell. Sea $z_0 \in B$, luego existe una vecindad Y de Z_0 y una sección p de proyecciones, de rango 1 de $\mathcal{A}$ definida sobre Y. Así, $\beta(\mathcal{A}|_Y, p) = (\mathscr{H}, s)$. Entonces, por el Lema 2.4.1, $\mathcal{A}|_Y$ es isomorfo a $\mathcal{A}(\mathscr{H})$. ■

Lema 2.4.2. *Consideremos $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ haces de espacios de Hilbert, no nulos sobre B. Además, consideremos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ los haces asociados de álgebras C^*, y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un isomorfismo. Entonces para todo $z \in B$, existe una vecindad Y de z y un isomorfismo $\mathscr{H}|_Y \to \mathscr{H}'|_Y$ que induce $f|_Y$.*

Demostración. Consideremos una vecindad Y de z, y una sección p de proyecciones de rango 1 de $\mathcal{A}|_Y$. Entonces $p' := f(p)$ es una sección, también de proyecciones de rango 1, pero de $\mathcal{A}'|_Y$. Supongamos que existen secciones continuas s de $\mathscr{H}|_Y$ y s' de $\mathscr{H}'|_Y$ de norma 1 tales que para todo $z \in Y$, $p(z)$ y $p'(z)$ son las secciones inducidas por $s(z)$ y $s'(z)$. En consecuencia, f induce un isomorfismo $g : (\mathcal{A}|_Y, p) \to (\mathcal{A}'|_Y, p')$, y por lo tanto, un isomorfismo

$$\beta(\mathcal{A}|_Y, p) = \beta(\alpha(\mathscr{H}|_Y, s)) \to \beta\left(\mathcal{A}'|_Y, p'\right) = \beta\left(\alpha\left(\mathscr{H}'|_Y, s'\right)\right).$$

Finalmente, por el Lema 2.4.1, tenemos un isomorfismo $(\mathscr{H}|_Y, s) \to (\mathscr{H}'|_Y, s')$ que induce g. ■

Teorema 2.4.2. *Consideremos $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ haces de Hilbert sobre un espacio topológico B, y consideremos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sus haces de álgebras C^* asociados, respectivamente. Entonces, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son localmente isomorfos si, y sólo si $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ son localmente isomorfos.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son localmante isomorfos, entonces existe una vecindad Y de $z \in B$ de tal forma que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un isomorfismo, por el Lema 2.4.2 se tiene que φ es inducido por un isomorfismo $\mathscr{H}|_Y \to \mathscr{H}'|_Y$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ son localmente isomorfos, se sigue directamente que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son localmente isomorfos, por la construcción de estos. ■

Finalizamos la sección con el siguiente resultado importante, el cual con base en todo el trabajo del capítulo 1 y estas secciones del capítulo 2, resulta trivial.

Teorema 2.4.3. *Consideremos un haz de Hilbert $\mathscr{H}$ de rango infinito, sobre un espacio topológico B paracompacto. Consideremos, además, su haz asociado de álgebras C^*. Entonces,*

1. *$\mathscr{H}$ es trivial;*
2. *$\mathcal{A}$ es trivial;*
3. *$\mathscr{H}$ es localmente trivial;*
4. *$\mathcal{A}$ es localmente trivial,*

son equivalentes.

2.5. Relaciones entre haces de Hilbert y haces de álgebras C^*. Primer resultado global

Teorema 2.5.1. *Sea B un espacio topológico completamente regular, consideremos $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ haces de Hilbert no nulos sobre B, y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sus haces asociados de álgebras C^*, respectivamente. Entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son isomorfos si, y sólo si existe un haz de Hilbert $\mathcal{L}$ sobre B de rango 1, de tal forma que $\mathscr{H}$ es isomorfo a $\mathcal{L} \otimes \mathscr{H}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{H}'$ es isomorfo a $\mathcal{L} \otimes \mathscr{H}$. Digamos que $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ y $\mathcal{L} = ((L(z)), \Delta)$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \varphi_z : & \mathcal{H}(z) & \to & L(z) \otimes \mathcal{H}(z) \\ & a & \mapsto & 1 \otimes a \end{array}$$

es un isomorfismo para cada $z \in B$, en consecuencia $\varphi := (\varphi_z)_{z \in B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un isomorfismo de álgebras C^*.

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{\psi} := \left(\tilde{\psi}_z\right)_{z\in B} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un isomorfismo. Consideremos $\mathscr{H} = ((\mathcal{H}(z)), \Gamma)$ y $\mathscr{H}' = ((\mathcal{H}'(z)), \Gamma')$ haces de Hilbert. De esta manera, para todo $z \in B$,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi}_{z\in B} : & \mathcal{H}(z) & \to & \mathcal{H}'(z) \\ & \sigma_z & \mapsto & \lambda\sigma_z, \end{array}$$

con $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Por la Observación 2.4.1, tenemos un espacio de Hilbert

$$L(z) = \{T(z) : \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'(z) \,|T(z) \text{ es lineal}\}.$$

La norma de un elemento $L(z)$ coincide con su norma como aplicación lineal de $\mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'(z)$. Sea $\Omega := \{\}$. Entonces, por definición, Ω cumple H.1 y H.4.

Veamos que Ω verifica H.3. Consideremos r y r' en Ω, y tomemos s en Γ tal que $\|s\| = 1$ en una vecindad de z_0 en B, entonces

$$\left\langle r(z), r'(z)\right\rangle = \left\langle r(z)\, s(z), r'(z)\, s(z)\right\rangle$$

en una vecindad de z_0, lo que prueba H.3.

Finalmente, veamos que Ω verifica H.2. Consideremos z_0 en B, por el Lema 2.4.2, existe una vecindad abierta Y de z_0 y un isomorfismo

$$s : \mathscr{H}|_Y \to \mathscr{H}'|_Y$$

que induce ψ_z en cada z en Y. Consideremos $f : B \to \mathbb{C}$ una función continua y acotada, nula en una vecindad de $B \setminus Y$,

$$f(z) = \begin{cases} f(z)\, s(z) & \text{sí} \quad z \in Y \\ 0 & \text{sí} \quad z \in B \setminus Y \end{cases}$$

que en z_0 tiene un valor arbitrario $L(z_0)$, y en consecuencia se cumple H.2. Por lo tanto, $\mathcal{L} = ((L(z)), \Omega)$ es un haz de Hilbert sobre B de rango 1. Sea

$$\varphi_z : L(z) \otimes \mathcal{H}(z) \to \mathcal{H}'(z)$$

el isomorfismo canónico. Si $r \in \Omega$ y $s \in \Gamma$, la sección

$$z \mapsto \varphi_z(r(z) \otimes (z)) = r(z)(s(z)) \in \Gamma',$$

pues $r' : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$, y así, $\varphi := (\varphi_z)_{z\in B} : \mathcal{L} \otimes \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ es un isomorfismo. ■

Observación 2.5.1. *Si $\mathcal{L}$ es no trivial, entonces $\mathscr{H}$ puede o no ser isomorfo a $\mathscr{H}'$.*

Observación 2.5.2. *Consideremos un espacio topológico paracompacto, y dado que un haz de rango 1 es localmente trivial, entonces existe una biyección entre la clase de haces de rango 1 y $\check{H}^1\left(B; \mathcal{S}^1\right)$, donde $\mathcal{S}^1$ es la pregavilla de aplicaciones continuas de $B \to \mathbb{S}^1$. Cosideremos la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1 \longrightarrow 1$$

Como $\mathbb{R}$ es un espacio fibrado localmente trivial sobre $\mathbb{S}^1$, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathbb{S}^1} \longrightarrow 1\ ,$$

donde $\mathcal{R}$ es el haz de gérmenes de aplicaciones continuas de $B \to \mathbb{R}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta en cohomología

$$\check{H}^n\left(B;\underline{\mathbb{R}}\right) \longrightarrow \check{H}^n\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right) \longrightarrow \check{H}^{n+1}\left(B;\mathbb{Z}\right) \longrightarrow \check{H}^{n+1}\left(B;\underline{\mathbb{R}}\right),$$

pero $\check{H}^n\left(B;\mathcal{R}\right) = 0$ para todo $n \geq 1$, de esta manera $\check{H}^n\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right) \to \check{H}^{n+1}\left(B;\mathbb{Z}\right)$ es un isomorfismo. En particular, $\check{H}^1\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right)$ es isomorfo a $\check{H}^2\left(B,\mathbb{Z}\right)$.

2.6. Relaciones entre haces de Hilbert y haces de álgebras C^*. Segundo resultado global

Lema 2.6.1. *Consideremos un haz de Hilbert $\mathscr{H} = \left(\left(\mathcal{H}\left(z\right)\right),\Gamma\right)$ sobre un espacio topológico B tal que $\mathcal{H}\left(z\right) \neq 0$ para todo $z \in B$, y digamos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(\mathscr{H}\right)$. Entonces un automorfismo $\varphi : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ induce la identidad $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ si, sólo si $\varphi\left(z\right) : \mathcal{H}\left(z\right) \to \mathcal{H}\left(z\right)$ es de la forma $\varphi\left(z\right) = \left(u\left(z\right) \circ id_{\mathcal{H}(z)}\right)$, donde $u : B \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua.*

Demostración. Supongamos que $\varphi : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un automorfismo que induce $id_{\mathcal{A}}$, entonces $\varphi_z : \mathcal{H}\left(z\right) \to \mathcal{H}\left(z\right)$ es un automorfismo que induce $id_{A(z)} : A\left(z\right) \to A\left(z\right)$ sobre el álgebra de los operadores compactos de $\mathcal{H}\left(z\right)$, es en consecuencia, una homotecia con $u\left(z\right) \in \mathbb{S}^1$. Luego, para todo z_0 en B, existe una sección continua s de $\mathscr{H}$ tal que $s\left(z\right) \neq 0$ en una vecindad Y de z_0. Veamos que sobre Y, $u\left(z\right)$ es continua, en efecto

$$u\left(z\right) = \left\langle \varphi\left(z\right) s\left(z\right), s\left(z\right)\right\rangle \left\|s\left(z\right)\right\|^{-2},$$

lo que prueba la continuidad.

El recíproco es evidente. ∎

Supongamos que B es un espacio topológico paracompacto y $\mathcal{A}$ un haz de álgebras C^* elementales que satisfacen la condición de Fell. Buscaremos condiciones para la existencia de un haz $\mathscr{H}$ sobre B de tal forma que $\mathcal{A}$ sea isomorfo $\mathcal{A}\left(\mathscr{H}\right)$. Consideremos una familia de subconjuntos $\left(Y_i\right)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de B, denotaremos

$$Y_{i_1\cdots i_p} := Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_p},$$

donde $i_1, \ldots, i_p \in I$.

Lema 2.6.2. *Existe:*

1. *una cubierta abierta $\left(Y_i\right)_{i\in I}$ de B;*

2. *para todo i en I, un haz de Hilbert $\mathscr{H}_i$ sobre Y_i y un isomorfismo*
$$h_i : \mathcal{A}(\mathscr{H}) \to \mathcal{A}|_{Y_i};$$
3. *para todo i y j en I, un isomorfismo $g_{ij} : \mathscr{H}_j|_{Y_{ij}} \to \mathscr{H}_i|_{Y_{ij}}$ que induce el isomorfismo $h_i^{-1}h_j$ de haces asociados de álgebras C^*.*

Demostración. Existe una cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de B y para todo $\alpha \in A$ existe un haz de Hilbert $\mathscr{K}_\alpha$ sobre U_α y un isomorfismo $k_\alpha : \mathcal{A}(\mathscr{K}_\alpha) \to \mathcal{A}|_{U_\alpha}$, por el Teorema 2.4.1. Dado que B es paracompacto podemos suponer que (U_α) es localmente finito, entonces existe una cubierta abierta $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ de B de tal forma que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada α. Consideremos ahora $\mathscr{K}'_\alpha := \mathscr{K}_\alpha|_{V_\alpha}$. Fijemos $\alpha \in A$ y $z \in V_\alpha$, entonces existe una vecindad abierta $W \subset V_\alpha$ de z y un conjunto finito A' de A de manera que $W \cap \overline{V}_\beta = \varnothing$ para todo $\beta \notin A'$. Tomemos β en A', luego existe una vecindad abierta $W_\beta \subset W$ de z y un isomorfismo $\mathscr{K}'_\beta|_{W_\beta\cap V_\beta} \to \mathscr{K}'_\alpha|_{W_\alpha\cap V_\beta}$ que induce $k_\alpha^{-1}k_\beta$ sí $z \notin \overline{V}_\beta$ y sí $z \in \overline{V}_\beta$, entonces $z \in U_\alpha$, y el lema se sigue del Lema 2.4.2. En conclusión, al ser A' finito, obtenemos una vecindad abierta $W_{\alpha,z} \subset V_\alpha$ de z, y para todo β en A, un isomorfismo $\mathscr{K}'_\beta|_{W_{\alpha,z}\cap V_\beta} \to \mathscr{K}'_{W_{\alpha,z}\cap V_\beta}$ que induce $k_\alpha^{-1}k_\beta$. Entonces si tomamos
$$I := \{i = (\alpha, z)\,|\alpha \in A,\ \ z \in V_\beta\};$$
$$Y_i := W_{\alpha,z};$$
$$\mathscr{H}_i := \mathscr{K}'_\alpha|_{W_{\alpha,z}\cap V_\beta};$$
$$h_i := k_\alpha|_{W_{\alpha,z}}$$
conluímos la prueba del lema. ∎

Lema 2.6.3. *Supongamos las hipótesis de Lema 2.6.2, entonces:*

1. *para todo i, j, k en I existe una única función continua $u_{ijk} : Y_{ijk} \to \mathbb{S}^1$ tal que $g_{ij}g_{jk} = u_{ijk}g_{ik}$;*
2. *las aplicaciones u_{ijk} inducen un 2-cociclo de (Y_i) con valores en el haz de gérmenes $\underline{\mathbb{S}^1}$ de aplicaciones continuas $B \to \mathbb{S}^1$;*
3. *la imagen γ como cociclo en $\check{H}^2\left(B; \underline{\mathbb{S}^1}\right)$ no depende de $\mathcal{A}$.*

Demostración.

1. Se sigue del Lema 2.6.1.
2. Consideremos i, j, k en I, entonces sobre Y_{ijkl}:
$$\begin{aligned} u_{jkl}u_{ikl}^{-1}u_{ijl} &= \left(g_{jl}^{-1}g_{jk}g_{kl}\right)\left(g_{kl}^{-1}g_{lk}^{-1}g_{il}\right)\left(g_{il}^{-1}g_{ij}g_{jl}\right) \\ &= g_{jl}^{-1}\left(g_{jk}g_{lk}^{-1}\right)g_{ij}g_{jl} \\ &= g_{jl}^{-1}\left(u_{ijk}g_{ij}^{-1}\right)g_{ij}g_{jl} \\ &= g_{jl}^{-1}u_{ijk}g_{jl} \\ &= u_{ijk}. \end{aligned}$$

3. Consideremos $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\mathscr{H}_\lambda$, h_λ y $g_{\lambda\mu}$ como en el Lema 2.6.2. Sea $u_{\lambda\mu\nu}$ el cociclo correspondiente. Probaremos que dados dos cociclos u_{ijk} y $u_{\lambda\mu\nu}$ inducen la misma clase en $\check{H}^2\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right)$, podemos reemplazar Y_i por una cubierta más fina, de manera que a los objetos $\mathscr{H}_i$, h_i y g_{ij} los reemplazamos por sus restricciones a los elementos de la nueva cubierta. Supongamos que para todo i en I y para todo λ en Λ existe un isomorfismo $g_{i\lambda} : \mathscr{H}_\lambda|_{Y_{i\lambda}} \to \mathscr{H}_i|_{Y_{i\lambda}}$ de manera que induce $h_i^{-1}h_\lambda$ el isomorfismo de haces de álgebras C^* asociados. Sea
$$A := I \times \Lambda,$$
luego las construcciones previas inducen una nueva cubierta $(Y_a)_{a\in A}$, $\mathscr{H}_a$, h_a y g_{ab} que satisfacen las hipótesis del Lema 2.6.2, y en consecuencia u_{abc} las satisface. Por [5] $\overline{u_{ijk}} = \overline{u_{abc}} = \overline{u_{\lambda\mu\nu}}$.

■

Definición 2.6.1. *Recordemos que existe un isomorfismo* $i : \check{H}^2\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right) \to \check{H}^3(B;\mathbb{Z})$. *Así si* $\gamma \in \check{H}^2\left(B;\underline{\mathbb{S}^1}\right)$ *como en el Lema 2.6.3 . Definimos la clase de Dixmier-Douady* $\delta(\mathcal{A}) := i(\gamma)$.

Finalizamos la sección con nuetro segundo resultado global.

Teorema 2.6.1. *Consideremos un espacio topólogico paracompacto* B *y un haz de álgebras* C^* *elementales* $\mathcal{A}$ *que verifica la condición de Fell. Entonces existe un haz de Hilbert* $\mathscr{H}$ *sobre* B *tal que* $\mathcal{A}$ *es isomorfo a* $\mathcal{A}(\mathscr{H})$ *si, y sólo si* $\delta(\mathcal{A}) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\mathcal{A}(\mathscr{H})$. Entonces por la construcción de $\delta(\mathcal{A})$ podemos tomar por cubierta de B la formada por un único abierto de B. Luego, todo 2-ciclo relativo a esta cubierta es cohomólogo a 0, y por lo tanto, $\delta(\mathcal{A}) = 0$.

Ahora supongamos que $\delta(\mathcal{A}) = 0$, luego por [5] p.224, existen Y_{ij}, $\mathscr{H}_i$, h_i y g_{ij} con las propiedades del Lema 2.6.2, y funciones continuas $v_{ij} : Y_{ij} \to \underline{\mathbb{S}^1}$ tales que para todo $i,j,k \in I$, tenemos $u_{ijk} = v_{jk}v_{ik}^{-1}v_{ij}$. Si tomamos $g'_{ij} = v_{ij}^{-1}g_{ij}$, los isomorfismos $g'_{ij} : \mathscr{H}_j|_{Y_{ij}} \to \mathscr{H}_i|_{Y_{ij}}$ verifican
$$g'_{ij}g'_{jk} = v_{ij}^{-1}g_{ij}g_{ik}v_{jk}^{-1} = u_{ijk}^{-1}v_{ik}^{-1}u_{ijk}g_{ik} = g'_{ij},$$
luego podemos definir un haz de Hilbert $\mathscr{H}$ sobre B ■

2.7. Haces localmente triviales

Sea $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert de dimensión $n > 0$; sea $A_0 = \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$, el álgebra de operadores compactos de $\mathcal{H}_0$, consideremos $\mathcal{U}(\mathcal{H}_0)$ con la topología de la covergencia puntual, luego
$$\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0) = \mathcal{U}(\mathcal{H}_0)/Z(\mathcal{U}(\mathcal{H}_0)),$$

en [2] vemos que $\mathcal{U}(\mathcal{H}_0)$ es un espacio fibrado localmente trivial sobre $\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0)$. En consecuencia tenemos la siguiente sucesión exacta de pregavillas de grupos

$$1 \longrightarrow \underline{\mathbb{S}^1} \longrightarrow \underline{\mathcal{U}(\mathcal{H}_0)} \longrightarrow \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0)} \longrightarrow 1.$$

Supongamos que B es un espacio topológico paracompacto. Luego por [6], entonces tenemos la siguiente aplicación canónica

$$\Delta : \check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0)}\right) \to \check{H}^2\left(B; \underline{\mathbb{S}^1}\right).$$

Las clases de isomorfismo de haces localmente triviales de álgebras C^* elementales de rango n^2 sobre B se corresponden biyectivamente con los elementos de $\check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0)}\right)$. Sea $\mathcal{A}$ un haz localmente trivial de álgebras C^* elementales sobre B de rango n^2. Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una cubierta de B y $h_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}|_{Y_i}$, donde $\mathcal{A}_i$ es el haz constante sobre Y_i inducida por $\mathcal{A}_0$. Luego los $g_{ij} := h_i^{-1}h_j$ son 1-cociclos de la cubierta con valores en $\underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H}_0)}$.

Consideremos otro haz $\mathcal{A}'$ de álgebras C^* elementales localmente triviales de rango n^2. Supongamos que existen isomorfismos $h_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}'|_{Y_i}$, y además supogamos que los cociclos $\left(g'_{ij}\right)$ son cohomólogos a (g_{ij}), entonces existen $k_i : Y_i \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que

$$h_i'^{-1}h_j = k_i^{-1}h_i^{-1}h_jk_j$$

y

$$h_ik_ih_i'^{-1} = h_jk_jh_j'^{-1}$$

en Y_{ij}. Lo cual prueba que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son isomorfos. En consecuencia, si $\gamma \in \check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H})}\right)$ está asociado a $\mathcal{A}$ y a $\mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son isomorfos.

Lema 2.7.1. *La identificación canónica de las clases de haces localmente triviales de álgebras C^* elementales de rango n con los elementos de $\check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H})}\right)$, entonces tenemos una identificación entre δ y Δ.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un haz de álgebras C^* localmente trivial de rango n. Sea $c \in \check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{U}(\mathcal{H})}\right)$. Sean $(Y_i)_{i\in I}$, h_i y g_{ij} de manera que c es la imagen de g_{ij} en $\check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H})}\right)$. Escogiendo de manera adecuada los (Y_i) podemos suponer que existe para todo $i, j \in I$ una aplicación continua $l_{ij} : Y_{ij} \to \underline{\mathcal{U}(\mathcal{H})}$. Recordemos que $\Delta(c)$ es un elemento de $\check{H}^2\left(B; \underline{\mathcal{S}^1}\right)$ que se corresponde con un 2-ciclo (u_{ijk}) definido por $l_{ij}l_{jk} = u_{ijk}l_{ik}$. Sea $\mathscr{H}_i$ el haz de espacios de Hilbert que corresponde a $\mathcal{H}_0$. Entonces $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\mathscr{H}_i)$ y $l_{ij} : \mathscr{H}_j|_{Y_{ij}} \to \mathscr{H}_i|_{Y_{ij}}$ que induce $h_i^{-1}h_j$, y por lo tanto $\Delta(c) = \delta(c)$. ■

Lema 2.7.2. *Consideremos la sucesión exacta central de haces de pregavillas:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xrightarrow{g} \mathscr{C} \longrightarrow 0$$

sobre un espacio topológico paracompacto B. Si $\mathscr{B}$ es suave, entonces

$$\Delta : \check{H}^1(B;\mathscr{C}) \to \check{H}^2(B;\mathscr{A})$$

es biyectiva.

Demostración. Para probar la inyectividad consideremos (c_{ij}) un 1-cociclo de una cubierta localmente finita con valores en $\mathscr{C}$. Podemos reemplazar (Y_i) por una cubierta más fina, y además podemos suponer que $(c_{ij}) = g(b_{ij})$, donde b_{ij} es una cocadena de (Y_i) con valores en $\mathscr{B}$, entonces existe (a_{ijk}) definido por $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}a_{ijk}$ es un 2-ciclo de (Y_i) con valores en $\mathscr{A}$, donde $\Delta((\overline{c_{ij}})) = (\overline{a_{ijk}})$. Sean $\left(c'_{ij}\right)$ otro elemento de $\check{H}^1((Y_i);\mathscr{C})$, y $\left(b'_{ij}\right)$, $\left(a'_{ij}\right)$ definidos como arriba. Supongamos que existe una cocadena (a_{ij}) con valores en $\mathscr{A}$ tal que

$$a'_{ijk} = a_{ijk}a_{ij}a_{jk}a_{ik}^{-1}.$$

Probaremos que (c_{ij}) y $\left(c'_{ij}\right)$ son cohomólogos, y de esta manera habremos probado la inyectividad de Δ. Haciendo $b_{ij} = a_{ij}^{-1}b_{ij}$ llegamos a que $a'_{ijk} = a_{ijk}$ de esta manera podemos restringirnos a este caso. Sea $(Y'_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta tal que $\overline{Y'}_i \subset Y_i$ para cada $i \in I$. Definimos el conjunto

$$L := \left\{(J,v)\,|J \subset I, v = (v_i)_{i\in J}\ \forall i \in J\right\},$$

donde $v_i : \overline{Y'}_i \to \mathscr{B}$ una sección y es tal que $b'_{ij} = v_i b_{ij} v_j^{-1}$ para todo $i, j \in J$. Observemos que el conjunto L posee un orden indctivo dado por la contención. Supongamos que (J,v) es un elemento maximal de L. Mostraremos que $J = I$, esto probará que (b_{ij}) y $\left(b'_{ij}\right)$ son cohomólogos, y por lo tanto, (c_{ij}) y $\left(c'_{ij}\right)$ también lo son.

Procederemos por contradicción. Supongamos que (J,v) no es maximal, y supongamos que existe $i \in I \setminus J$. Sea

$$Y := \overline{Y}'_i \cap \left(\bigcup_{j\in J} \overline{Y}'_j\right).$$

Consideremos $z \in Y$. Si j_1 y j_2 son dos índices tales que $z \in \overline{Y}'_{j_1}$ y $z \in \overline{Y}'_{j_2}$, entonces

$$\begin{aligned}
b'_{ij_2}(z)\,v_{j_2}(z)\,b_{ij_2}^{-1}(z) &= b'_{ij_2}(z)\,v_{j_2}b_{j_1j_2}^{-1}(z)\,b_{ij_1}^{-1}(z)\,a_{ij_1j_2}(z)\\
&= b'_{ij_2}(z)\,b'^{-1}_{j_1j_2}(z)\,v_{j_1}(z)\,b_{ij_1}^{-1}(z)\,a_{ij_1j_2}(z)\\
&= b'_{ij_1}(z)\,a_{ij_1j_2}^{-1}(z)\,v_{j_1}(z)\,b_{ij_1}^{-1}(z)\,a_{ij_1j_2}(z)\\
&= b'_{ij_1}(z)\,v_{j_1}(z)\,b_{ij_1}^{-1}(z).
\end{aligned}$$

En consecuencia, podemos definir una sección continua $w_i : Y \to \mathscr{B}$ tal que

$$b'_{ij} = w_i b_{ij} v_j^{-1}$$

con $j \in J$. Al ser $\mathscr{B}$ suave, w_i se extiende a una sección continua

$$w_i' : \overline{Y}_i' \to \mathscr{B}$$

, y esto entra en contradicción con la suposición de la no maximalidad de (J, v).

Ahora probaremos que Δ es sobre. Consideremos una cubierta abierta $(Y_i)_{i\in I}$ localmente finita de B, (a_{ijk}) un 2-cociclo en $\check{H}^2\left((Y_i)_{i\in I}\,;\mathscr{A}\right)$. Sea $(Y_i')_{i\in I}$ una cubierta abierta tal que $\overline{Y}_i' \subset Y_i$ para cada $i \in I$. Definimos el conjunto

$$L := \left\{ (J, b) \,|\, J \subset I, b = (b_{ij})_{i,j\in I} \right\},$$

para todo $i, j \in J$, $b_{ij} : \overline{Y}_i' \cap \overline{Y}_j' \to \mathscr{B}$ es una sección continua tal que $b_{ij}b_{jk} = a_{ijk}b_{jk}$ para todo $i, j, k \in J$. Notemos que la relación de contención dota al conjunto L de un orden inductivo. Consideremos (J, b) un elemento maximal de L, y probemos que $J = L$, para lograr esto procederemos por contradicción. Supongamos que existe $i \in I \setminus J$. Sea

$$M := \left\{ \left(K, b'\right) |K \subset J, b' = \left(\hat{b}_{ij}\right)_{j\in K} \right\}$$

donde $\hat{b}_{ij} : \overline{Y}_i' \cap \overline{Y}_j' \to \mathscr{B}$ es una sección para toda $j \in K$ y es tal que $\hat{b}_{ij}b_{jk} = \hat{b}_{ik}a_{ijk}$ para todos los $j, k \in K$. Consideremos (K, b') un elemento maximal de M, y veamos que $K = J$. Supongamos que no son iguales, entonces existe un índice $j \in J \setminus K$, luego podemos definir una sección continua

$$\beta : \overline{Y}_i' \cap \overline{Y}_j' \cap \left(\bigcup_{k\in K} \overline{Y}_k' \right) \to \mathscr{B}$$

tal que $\beta b_{jk} = \hat{b}_{jk}a_{ijk}$ para $k \in K$; en efecto, si $k, l \in K$, entonces definimos β_k y β_l por $\beta_k b_{jk} = \hat{b}_{ik}a_{ijk}$ y $\beta_l b_{jl} = \hat{b}_{il}a_{ijl}$, respectivamente. Observemos que

$$b_{jk}b_{kl} = b_{jl}a_{jkl}$$

$$\hat{b}_{ik}b_{kl} = \hat{b}_{il}a_{ikl}$$

entonces

$$\beta_l b_{jk}b_{kl}a_{jkl}^{-1} = \hat{b}_{ik}b_{kl}a_{ikl}^{-1}a_{ijl},$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\beta_l &= \hat{b}_{ik}b_{kl}a_{ikl}^{-1}a_{ijl}a_{jkl}b_{kl}^{-1}b_{jk}^{-1} \\
&= \hat{b}_{ik}b_{jk}^{-1}b_{kl}b_{kl}^{-1}a_{jkl}a_{ikl}^{-1}a_{ijl} \\
&= \hat{b}_{ik}b_{jk}^{-1}a_{jkl}a_{ikl}^{-1}a_{ijl} \\
&= \hat{b}_{ik}b_{jk}^{-1}a_{ijk} \\
&= \hat{b}_{ik}a_{ijk}b_{jk}^{-1} \\
&= \beta_k.
\end{aligned}$$

Al ser $\mathscr{B}$ suave, podemos extender β a una sección continua $\beta' : \overline{Y}'_i \cap \overline{Y}'_j \to \mathscr{B}$ lo que contradices la maximalidad de (K, b'), por lo tanto $K = J$. En consecuencia, existe una familia $\left(\hat{b}_{ij}\right)_{j \in J}$, donde para todo $j \in J$, $\hat{b}_{ij}$ es una sección continua con la propiedad $\hat{b}_{ij} b_{jk} = \hat{b}_{ik} a_{ijk}$ para $i, j \in J$. Entonces la existencia de los b_{jk} y de los $\hat{b}_{ij}$ contradicen la maximalidad de (J, b). ∎

Teorema 2.7.1. *Consideremos un espacio topológico paracompacto B, entonces la aplicación $\mathcal{A} \mapsto \delta(\mathcal{A})$ induce una correspondencia biyectiva entre las clases de haces localmente triviales de álgebras C^* elementales sobre B de rango infinito y $\check{H}^3(B; \mathbb{Z})$.*

Demostración. Por los Lemas 1.2.3 y 1.2.4 tenemos que $\underline{\mathcal{U}(\mathcal{H})}$ es suave. Por lo tanto,

$$\Delta : \check{H}^1\left(B; \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H})}\right) \to \check{H}^2\left(B; \underline{\mathbb{S}^1}\right)$$

es biyectiva por los Lemas 2.7.1 y 2.7.2. ∎

Sí bien en el Teorema 2.7.1 nos limitamos a haces localmente triviales, esta hipótesis no siempre es necesaria, como veremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.7.2. *Consideremos un haz de álgebras C^* elementales $\mathcal{A}$ sobre B, separable y de rango infinito que verifica la condición de Fell. Si suponemos que B es un espacio topológico paracompacto de dimensión infinita, entonces $\mathcal{A}$ es localmente trivial.*

Demostración. Consideremos z_0 en B, luego existe una vecidad cerrada Y de z_0, y una sección continua $e : Y \to E$ de manera que $e(z)$ es un subconjunto total...Digamos que $\beta(\mathcal{A}|_Y, e) = (\mathscr{H}, s)$. Entonces $\mathscr{H}$ es separable de rango infinito, al ser B paracompacto de dimensión finita y Y cerrado tenemos que Y es paracompacto de dimensión finita luego, por el Teorema 1.2.5, $\mathscr{H}$ es trivial. Finalmente, por el Lema 2.4.1 tenemos que $\mathcal{A}|_Y$ es isomorfo a $\mathcal{A}(\mathscr{H})$, y por lo tanto es localmente trivial. ∎

2.8. Aplicación al estudio de ciertas álgebras C^*

Sea A un álgebra CCR y $\hat{A}$ su espectro que supondremos separable, y es por lo tanto un espacio localmente compacto. Todo elemento z de $\hat{A}$ lo podemos identificar con un ideal primitivo de A, sea $A(z) = A/z$ un álgebra C^* elemental no nula. Todo $s \in A$ induce una sección $z \mapsto s'(z)$ sobre $\hat{A}$, $s'(z)$ es la imagen canónica de s en $A(z)$,

$$\begin{array}{rccc} f: & \hat{A} & \to & Prim(A) \\ & z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} s'(z): & \hat{A} & \to & A/f(z) \\ & z & \mapsto & s/f(z), \end{array}$$

estas secciones forman una subálgebra involutiva del álgebra involutiva de todas las secciones. Si $s \in A$, la función $z \mapsto \|s'(z)\|$ es continua, pues $\hat{A}$ es separable, por [10] el Teorema 4.1, para todo $z \in B$, el conjunto $\{s'(z)|\}$. Por lo tanto, existe un haz $\mathcal{D} = ((A(z)), \Delta)$ y es único tal que las secciones s' son continuas con respecto a $\mathcal{D}$. Diremos que $\mathcal{D}$ es el haz asociado a A. Si A es un álgebra C^* de traza continua, $\mathcal{D}$ verifica la condición de Fell. Si A es separable, $\mathcal{D}$ es separable y $\hat{A}$ es de base numerable y por lo tanto, $\hat{A}$ es paracompacto.

Supongamos que $\mathcal{D} = ((A(z)), \Delta)$ es un haz de álgebras C^* elementales sobre un espacio localmente compacto B. Sea

$$A = \{t \in \Delta | \|t(z)\| \to^{z \to \infty} 0\}.$$

Para $t \in A$ tenemos que

$$\|t\| = \sup_{z \in B} \|t(z)\|.$$

Entonces A es un álgebra CCR, diremos que A es el álgebra CCR asosciada a $\mathcal{D}$. Supongamos que $A(z) \neq 0$ para todo z en B. Todo z en B induce un ideal primitivo de A, a saber, $I_z = \{t \in A | t(z) = 0\}$, y además A/I_z es isomorfo a $A(z)$, por lo tanto, z está asociado a una única representación irreducible de A. Por el corolario del Teorema 1.2 en [4], tenemos que B coincide con el espectro de A. Si $\mathcal{D}$ verifica la condición de Fell, entonces A es un álgebra C^* de traza continua.

Lema 2.8.1. *Sean A un álgebra C^* de traza continua, $\mathcal{D} = ((A(z)), \Delta)$ el haz de álgebras C^* elementales no nulas asociado a A, A' el álgebra C^* de traza continua asociado a $\mathcal{D}$. Para todo s en A, sea s' en Δ el inducido por s en A. Entonces s' está en A y*

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ s & \mapsto & s' \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Por el Lema 4.3 de [10] tenemos que s' está en A'. Luego $A \to A'$ es un homomorfismo, por definición. Luego, por [9] p.411, este homomorfismo es isométrico, y es sobre por [11] Teorema 3.3 es sobre. ■

Lema 2.8.2. *Sean B un espacio localmente compacto, $\mathcal{D} = ((A(z)), \Delta)$ un haz de álgebras C^* elementales sobre B que verifica la condición de Fell. Sean A el álgebra C^* de traza continua asociada a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}' = ((A'(z)), \Delta')$ el haz de álgebras C^* elementales asociado a A. Para todo z en B sea $U(z) : A(z) \to A'(z)$ el isomorfismo canónico. Entonces*

$$U := (U(z))_{z \in B} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$$

es un isomorfismo.

Demostración. Dado que los elementos de A son una familia total de secciones continuas relativas a $\mathcal{D}$, entonces sus imágenes bajo $(U(z))_{z \in B}$ son secciones continuas relativas a $\mathcal{D}'$. Luego, el lema se sigue por la Proposición 6 ■

Definición 2.8.1. *Sea A un álgebra C^* separable de traza continua, B su espectro, $\mathcal{D}$ el haz de álgebras C^* elementales sobre B asociado a A. Entonces $\delta(\mathcal{D}) \in \check{H}^3(B;\mathbb{Z})$ será denotado por $\delta(A)$.*

Sea $\mathscr{H}$ un has de Hilbert no nulo sobre un espacio localmente compacto, entonces podemos construir el haz asociado $\mathcal{A}$ de álgebras C^* elementales, pues el álgebra C^* de traza continua A está asociado a $\mathcal{A}$. Entonces diremos que A es el álgebra C^* derivada de $\mathscr{H}$.

Teorema 2.8.1. *Sea A un álgebra C^* separable de traza continua. Entonces A es derivada de un haz de Hilbert $\mathscr{H}$ que cumple la condición de Fell si, y sólo si $\delta(A) = 0$.*

Demostración. Supongamos que A es derivada de $\mathscr{H}$, entonces existe $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathscr{H})$ y de esta manera $\delta(\mathcal{A}) = \delta(A) = 0$, por el Teorema 2.5.1.

Recíprocamente, supongamos que $\delta(A) = 0$, entonces $\delta(\mathcal{A}) = 0$ se sigue que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathscr{H})$, y por lo tanto, A es el álgebra C^* derivada de $\mathscr{H}$. ∎

Lema 2.8.3. *Sean B un espacio localmente compacto de base numerable, $\mathcal{D} = ((A(z)), \Theta)$ un haz localmente trivial de álgebras C^* elementales separables sobre B; A el álgebra C^* asociada a $\mathcal{D}$, entonces A es separable.*

Demostración. Por la Proposición 17 tenemos que el haz $\mathcal{D}$ es separable, además por la Proposición 10 nos podemos restringir al caso en el que B es compacto. Consideremos (s_n) una sucesión total de Θ, ahora tomemos (f_n) una sucesión en $\mathcal{C}(B)$, de esta manera los $f_m s_n$ son elementos de A. Sean s en A y $\varepsilon > 0$, por la Proposición 2 existen $g_1, \ldots, g_p$ en $\mathcal{C}(B)$ tales que

$$\|s - g_1 s_1 - \ldots - g_p s_p\| \leq \varepsilon.$$

Tomando índices $i_1, \ldots, i_p$ obtenemos

$$\|s - f_{i_1} s_1 - \ldots - f_{i_p} s_p\| \leq 2\varepsilon.$$

Con lo que el lema queda demostrado. ∎

Sea n en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Diremos que un álgebra C^*, A, es homogénea de grado n si toda representación irreducible de A es de dimensión n. Si n es finito diremos que un álgebra C^* es homogénea de grado n si toda representación irreducible de A es de dimensión finita n.

Teorema 2.8.2. *Sea B un espacio localmente compacto de base numerable y de dimensión finita.*

1. *Si A es un álgebra C^* separable de traza continua, homogénea de grado infinito con espectro B, entonces el haz de álgebras C^*, $\mathcal{A}$ elementales sobre B asociado a A es localmente trivial.*

2. *La aplicación $A \to \delta(A)$ define una biyección del conjunto de clases de álgebras C^* separables de traza continua, homogéneas de grado inifinito y con espectro B sobre $\check{H}^3(B;\mathbb{Z})$.*

Demostración.

1. Por el Teorema 2.4.1 el haz $\mathcal{A}$ cumple la condición de Fell, luego por el Teorema 2.7.1 se sigue que $\mathcal{A}$ es localmente trivial.

2. Al ser A como en 1, entonces podemos construir el haz asociado a A, el cual denotaremos por $\mathcal{A}$. Por otro, por la Definición 2.8.1, $\delta(A) = \delta(\mathcal{D})$, luego por el Teorema 2.6.1 se tiene la biyección, así el teorema queda establecido.

∎

Corolario 2.8.1. *Sea B un espacio localmente compacto de base numerable y de dimensión infinita tal que $\check{H}^3(B;\mathbb{Z}) = 0$. Sea A un álgebra C^* separable de traza continua, homogénea con espectro B y de grado infinito. Sea A_0 el álgebra C^* de operadores compactos en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Entonces A es isomorfo al álgebra C^* de aplicaciones continuas $B \to A_0$, definidas por $z \mapsto s(z)$, tales que*

$$\|s(z)\| \to^{z\to\infty} 0.$$

Demostración. En efecto, el álgebra C^* A' de aplicaciones continuas $B \to A_0$ tales que

$$\|s(z)\| \to^{z\to\infty} 0$$

es separable, de espectro B, de traza continua y de rango infinito. Al tener $\check{H}^3(B;\mathbb{Z}) = 0$, entonces existe una única clase, y entonces cualquier álgebra con espectro B es isomorfa a A, en particular A'. ∎

Capítulo 3

Haces principales y la clase de Dixmier-Douady

3.1. G-haces principales

Recordemos que un G-haz principal sobre un espacio topológico M es una terna (P, M, G) donde G es un grupo topológico, al cual le llamamos **grupo estructural**, y P y M son espacios topológicos, a los que les llamamos **espacio total** y **espacio base**, respectivamente. Además tenemos una función continua sobreyectiva

$$\pi : P \to M,$$

a la que le llamamos **proyección**.

Tenemos una acción derecha, continua y libre del grupo G en P,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & P \times G & \to & P \\ & (x, g) & \mapsto & \varphi(x, g) := xg, \end{array}$$

donde la órbita coincide con la fibra, es decir, $Gx = \pi^{-1}(x)$. Necesitamos que (P, M, G) sea localmente trivial en el sentido de que exista una cubierta localmente finita $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M con la propiedad de que si $P_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$, entonces existen homeomorfismos

$$\begin{array}{ccc} P_\alpha & \to & U_\alpha \times G \\ p & \mapsto & (\pi(p), s_\alpha(p)) \end{array}$$

y que conmutan con la acción de G, es decir, $s_\alpha(pg) = s_\alpha(p)\, g$. Notemos que el haz trivial $(M \times G, M, G)$ es un G-haz principal sobre M si la acción está dada por $(m, h)\, g = (m, hg)$.

Diremos que dos haces principales (P, M, G) y (Q, M, G) son **isomorfos** si existe un homeomorfismo $f : P \to Q$ que conmuta con la G-acción, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & Q \arrow[d, "\pi_2"] \\ & M \end{tikzcd}$$

3.1.1. Haces principales y cohomología no abeliana

Notemos que la función $s_\alpha s_\beta^{-1} : P_\alpha \cap P_\beta \to G$ es constante en las fibras,

$$\begin{aligned}\left(s_\alpha s_\beta^{-1}\right)(pg) &= s_\alpha (pg)\, s_\beta^{-1}(pg)\\ &= s_\alpha (p)\, g g^{-1} s_\beta^{-1}(p)\\ &= s_\alpha (p)\, s_\beta^{-1}(p)\\ &= \left(s_\alpha s_\beta^{-1}\right)(p)\,,\end{aligned}$$

y por lo tanto, definen funciones de transición de P con respecto a la cubierta mediante

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G.$$

Las funciones $g_{\alpha\beta}$ son cociclos en la cohomología de Čech para la pregavilla $\underline{G}$ de funciones con valores en G en M. Si las trivializaciones son cambiadas entonces el cociclo es cambiado por una cofrontera. Por lo tanto un haz principal define una clase en $\check{H}^1(M; \underline{G})$. Más aun, es posible mostrar por la construcción estándar *clutching* que toda clase de cohomología se puede construir de esta manera.

Proposición 29. *Las clases de isomorfismo de G-haces sobre M están en correspondencia biyectiva con los elementos de $\check{H}^1(M; \underline{G})$.*

3.1.2. Espacios clasificantes de G-haces principales

Otra manera de describir las clases de isomorfismo de haces principales es mendiante el uso de espacios clasificantes. Si $f : N \to M$ es una función y (P, M, G) es un haz principal, entonces existe el haz **pull-back** $(f^*(P), N, G)$, definido por

$$f^*(P) = \{(p, n) \in P \times N : \pi(p) = f(n)\}.$$

Tomamos $f^*(P)$ como un espacio topológico o variedad por su definición como un subespacio o subvariedad de $P \times N$. La accción de G en $f^*(P)$ está dada por $(p, n)\, g = (pg, n)$.

Un G-haz principal (EG, BG, G) es llamado **espacio clasificante** de G-haces principales si tiene la propiedad de que para cualquier haz principal (P, M, G), existe una función f, única salvo homotopía, tal que $f^*(EG)$ es isomorfo a P. A la función f le llamamos **función clasificante**. Un hecho estándar es que los espacios clasificantes existe y son únicos, salvo equivalencia homotópica.

Para nuestros propósitos, sólo consideraremos la categoría de espacios del tipo de homotopía de un CW-complejo, denotada por $\mathcal{CW}$. Cualquier aplicación entre dos CW-complejos conexos cuyas morfismos asociados en grupos de homotopía son todos isomorfismos es, de hecho, una equivalencia homotópica.

Una caracterización útil de los espacios clasificantes en la categoría $\mathcal{CW}$ es el hecho de que un G-haz principal (P, M, G) es un espacio clasificante si, y sólo si $\pi_q(P) = 0$ para todo q.

Proposición 30. *El conjunto de clases de isomorfismo de G-haces principales sobre M está en correspondencia biyectiva con el conjunto de clases de homotopía de funciones de M a BG.*

3.1.3. Clases características de G-haces

Una **clase característica** c de G-haces principales asigna a cualquier G-haz principal (P, M, G) un elemento $c(P)$ en $H^*(M)$. Esta asignación es natural, en el sentido de que si $f : N \to M$ es una función y P es un G-haz sobre M entonces

$$c(f^*(P)) = f^*(c(P)).$$

Notemos, que entre otras cosas, esto implica que $c(P)$ depende sólo de la clase de isomorfismo de P. Este resultado en espacios clasificantes nos da una completa caracterización de todas las clases características. Si c es una clase característica podemos aplicarla a EG y obtener $\xi := c(EG) \in H^*(BG)$. Recíprocamente, si $\xi \in H^*(BG)$ entonces podemos definir una clase característica $c(P) := f^*(\xi)$, donde f es la función clasificante de P. En consecuencia, las clases características están en correspondencia biyectiva con $H^*(BG)$.

3.1.4. Fibraciones asociadas

Necesitamos considerar otras fibraciones que surgen como fibraciones asociadas al haz principal. Si (P, M, G) es un haz principal y G actúa por la izquierda en un espacio X entonces la acción de G en $P \times X$ está dada por $(p, x)g = \left(pg, g^{-1}x\right)$ y el cociente $(X \times G)/G$ es una fibración sobre M con fibra isomorfa a X.

3.2. Cambiando el grupo estructural

Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos topológicos. Si (Q, M, H) es un H-haz consideremos el problema de encontrar un G-haz P y una función $\tilde{\phi} : Q \to P$ tal que

1. $\tilde{\phi}(Q_m) \subset P_m$ para todo $m \in M$;
2. $\tilde{\phi}(qh) = \tilde{\phi}(q)\phi(h)$ para todo $q \in Q$ y para todo $h \in H$.

Para definir P hacemos actuar por la izquierda a H en G por $hg = \phi(h)g$ y definimos P como la fibración asociada a esta acción. El grupo G actúa en $Q \times G$ por $(p, g)g' = (p, gg')$. La acción de G conmuta con la acción de H y hace de P un G-haz principal. Lo denotamos como $\phi_*(Q)$.

Si elegimos trivializaciones locales de Q con funciones de transición $h_{\alpha\beta}$ estas definen trivializaciones locales de P con funciones de transición $\phi \circ h_{\alpha\beta}$. En otras palabras P es la imagen de Q bajo la función inducida

$$\phi^* : \check{H}^1(M; \underline{H}) \to \check{H}^1(M; \underline{G}).$$

En términos de espacios clasificantes tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Entonces existe una aplicación*

$$B\phi : BH \to BG$$

tal que si $f : M \to BH$ es una función clasificante para un H-haz Q entonces $B\phi \circ f : M \to BG$ es una función clasificante para el G-haz $\phi_* (Q)$.

Más interesante es el inverso de este problema. Si (P, M, G) es un G-haz principal, ¿podemos encontrar un H-haz Q de tal forma que $\phi_* (Q)$ es isomorfo a P? Se conocen algunas maneras de responder a esta cuestión. Una de ellas, en términos de cohomología de Čech: un haz Q existe si el haz (P, M, G) está contenido en la imagen de

$$\phi^* : \check{H}^1 (M; \underline{H}) \to \check{H}^1 (M; \underline{G}) .$$

Otra, es en términos de espacios clasificantes:

Teorema 3.2.2. *Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Entonces si*

$$f : M \to BG$$

es una función clasificante de P, entonces un H-haz Q existe, y es tal que $\phi_* (Q)$ es isomorfo a P si, y sólo si $f : M \to BG$ se levanta a una función $\hat{f} : M \to BH$, y es tal que $B\phi \circ \hat{f} = f$.

El tercer método es formular el problema como el de encontrar una sección de una fibración y emplear teoríade obstrucción.

Estamos interesados en dos casos particulares de este problema más general:

1. H es un subgrupo de Lie cerrado de G;
2. $\hat{G} \to G$ es una extensión central con kernel $\mathbb{S}^1$.

En el primero de los casos, decimos que G se reduce a H y en el segundo que se levanta a $\hat{G}$.

3.2.1. Reduciendo el grupo estructural

Sea H un subgrupo de Lie de Banach cerrado de un grupo de Lie de Banach G. Si (Q, M, H) es un haz principal con una aplicación de (Q, M, H) a (P, M, G) que identifica H con su imagen en (P, M, G). Esta imagen es una **reducción** de G a H. Es decir, es una subvariedad de (P, M, G) que es estable bajo H y junto con esta H-acción, define un H-haz principal sobre M. El problema de reducir G a H es equivalente al problema de encontrar una reducción a H. Sea (P, M, G) un haz, consideremos una fibra P_m. Una reducción del haz involucra seleccionar una H-órbita en P_m para cada m. El conjunto de todas las H-órbitas en P_m es el espacio de órbitas P_m/H y una reducción del haz (P, M, G), por lo tanto se corresponde con una sección del fibrado $P/H \to M$ con fibra P_m/H en m.

Aplicando esto al espacio clasificante de G vemos que $EG \to EG/H$ es un H-haz principal con espacio total contraíble, y por lo tanto, un espacio clasificante para H. La función $H \hookrightarrow G$ induce una aplicación $BH \to BG$ que bajo estas identificaciones, es la aplicación $EG/H \to BG$.

Teorema 3.2.3. *Sea (P, M, G) un G-haz principal con función clasificante*

$$f : M \to BG$$

a la reducción del grupo estructural G a H:

1. *La fibración $P/H \to M$ tiene una sección global$M$*
2. *La función clasificante f, tiene un levantamiento $\hat{f}$, a $BH = EG/H$.*

Si además, H es normal en G, entonces una condición equivalente es $\pi^*([P]) = 0$, donde π^* es la inducida en cohomología por la proyección $\pi : G \to G/H$,

$$\pi^* : \check{H}^1(M; \underline{G}) \to \check{H}^1\left(M; \underline{G/H}\right).$$

Demostración.

1. Definir una reducción de G a H significa tomar, para cada $m \in M$, una órbita de H en P_m, o de manera equivalente, un elemento de P_m/H, y esto define una sección de P/H.
2. Se sigue del teorema anterior.
3. Si G tiene una reducción a H, entonces siempre podemos elegir trivializaciones locales, de tal forma que las funciones de transición tomen valores en H, y por lo tanto $\pi^*([P]) = 0$. Recíprocamente, si las funciones de transición son $g_{\alpha\beta}$ y $\pi^*([P]) = 0$, entonces se debe cumplir que

$$g_{\alpha\beta} = g_\beta h_{\alpha\beta} g_\alpha^{-1},$$

donde $g_\alpha : U_\alpha \to G$ y $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to H$. Definimos las funciones de transición mediante trivializaciones locales $p \mapsto (\pi(p), s_\alpha(p))$, así que $g_{\alpha\beta}\pi = s_\beta s_\alpha^{-1}$. Si hacemos $s'_\alpha = s_\alpha g_\alpha$ y $s'_\beta = s_\beta g_\beta$, entonces encontramos las funciones $h_{\alpha\beta}$ requeridas.

■

Supongamos que M es un complejo CW y tratamos de dar un levantamiento de $f : M \to B$ al espacio total del haz fibrado $\pi_E : E \to B$ con fibra F de tal forma que $f = \pi_E \hat{F}$. Definimos $\hat{f}$ sobre el 0-esqueleto de M levantando f arbitrariamente. Extender $\hat{f}$ al 1-esqueleto sólo presenta problemas si la fibra F no es conexa. En general, no hay problemas en extender una función f del n-esqueleto al $(n+1)$-esqueleto si $\pi_n(F) = 0$. Nosotros nos limitaremos al caso en el que la fibra F es un espacio de Eilenberg-Maclane.

Teorema 3.2.4. *Sea $f : M \to$ una aplicación continua, donde es un complejo CW y sea $\pi_E : E \to B$ una fibración sobre M con fibra $F = K(A, n)$, donde A es un grupo abeliano y $n > 0$. Entonces existe una clase de cohomología $c(f, E) \in H^{n+1}(M; \mathcal{A})$ que depende sólo de la clase de homotopía de f, y es tal que f tiene un levantamiento $\hat{f} : M \to E$ si, y sólo si $c(f, E) = 0$. Además si M' es otro complejo CW y $g : M' \to M$ es continua, entonces*

$$c(fg, E) = g^*(c(f, E)) \in H^{n+1}\left(M'; \mathcal{A}\right).$$

Notemos que sólo es suficiente definir $c(id, E)$, donde $id : B \to B$ es la identidad. Entonces $c(f, E) = f^*(c(id, E))$

El siguiente lema nos permite calculas los grupos de homotopía de la fibra de $B\phi : BH \to BG$ en el caso en el que ϕ es la inclusión.

Lema 3.2.1. *Sea $i : H \hookrightarrow G$ la inclusión de grupos topológicos. Entonces existe un diagrama conmutativo de grupos de homotopía para todo $a \geq 0$.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_q(BH) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Bi_*"'] & \pi_{q-1}(H) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"'] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \pi_q(BG) \arrow[r, "\delta"] & \pi_{q-1}(G) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tomando $B := (EG \times G)/H$, sea Bi' el morfismo de haces

$$Bi' : B \to EG$$

y sea $I : EH \to B$ cubriendo a id_{BH}. Entonces $Bi' \circ I : EH \to EG$ es un morfismo de haces que cubre a Bi. El diagrama conmutativo anterior es el diagrama de sucesiones exactas largas de las fibraciones (EG, BG, G) y (EH, BH, H) con la aplicación de haces fibrados $Bi' \circ I$. ∎

3.2.2. Obstrucción y transgresión

Estamos interesados en el caso en el que la fibra F es un $K(\mathbb{Z}, 2)$. Consideremos la fibración $\pi : E \to B$ y sea $F = \pi^{-1}(b_0)$ la fibra sobre algún punto b_0 en B. Entonces tenemos los homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & H^3(B, \{b_0\} : R) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\pi^*"] & H^3(B; R) . \\
H^2(F; R) \arrow[r, "\delta"] & H^3(E, F; R) &
\end{tikzcd}$$

En nuestro caso π^* es inyectiva en $H^3(B, \{b_0\}; R)$ y la imagen de δ está en la imagen de π^*. Entonces tenemos $\tau(u) = \left(j^*(\pi^*)^{-1}\delta\right)(u)$, donde $u \in H^2(F; R)$ es tal que $\delta(u) \in \pi^*\left(H^3(B, \{b_0\}; R)\right)$.

Al ser F un $K(\mathbb{Z}, 2)$ tiene una clase fundamental $\eta \in H^2(F; \pi_2(F))$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sea $\pi_E : E \to B$ un haz fibrado sobre M con fibra F un espacio $K(\mathbb{Z}, 2)$ y sea η el generador canónico de $H^2(F; \pi_2(F)) = \mathbb{Z}$. Entonces $c(id, E) \in H^3(B; \pi_2(F))$ es la transgresión de μ.*

Demostración. Para la prueba veremos que $c(id, E)$ es la transgresión de μ y no de $-\mu$. Consideraremos el caso en el que el isomorfismo de Hurewicz $\pi_3(B) \to H_3(B; \mathbb{Z})$ es sobre en dimensión tres. Esto será suficiente para los casos que nos interesan.

Para asegurarnos de que el signo es correcto necesitamos ser cuidadosos con varias identificaciones. Estamos bajo la suposición de que $\pi_2(F) = \mathbb{Z}$. Sabemos que $H^2(F, \pi_2(F))$ tiene un generador canónico el cual es la clase de cohomología η con la propiedad de que si es aplicado a $\mathbb{S}^2$ en F obtenemos la clase de homotopía de $\mathbb{S}^2$. Sea ρ un generador de $\pi_2(F)$. Sea $\tau(\eta) = x$, entonces $\pi^*(z) = \delta(\eta)$. Consideremos $\mathbb{S}^3 \subset E$ con $b_0 \in \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{D}^3 \subset B$ con $\pi\left(\mathbb{D}^3\right) = \mathbb{S}^3$ con su frontera en F. Entonces por la definición de la clase de obstrucción tenemos

$$c(id, E)\left(\mathbb{S}^3\right) = \left[\mathbb{S}^2\right].$$

Por otro lado tenemos que $\pi\left(\mathbb{D}^3\right) = \mathbb{S}^3$ así que

$$x\left(\mathbb{S}^3\right) = \delta(\eta)\left(\mathbb{D}^3\right) = \eta\left(\mathbb{S}^2\right),$$

por lo tanto $c(id, E)\left(\mathbb{S}^3\right) = s\left(\mathbb{S}^3\right)$. De esta manera, vemos que tenemos el signo correcto. ∎

3.3. Extendiendo el grupo estructural

Recordemos que tenemos una sucesión exacta corta centra del pregavillas:

$$1 \longrightarrow \underline{\mathbb{S}^1} \longrightarrow \underline{\mathcal{U}(\mathcal{H})} \xrightarrow{\pi} \underline{\mathcal{PU}(\mathcal{H})} \longrightarrow 1$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta central de grupos de Lie:

$$1 \longrightarrow \underline{\mathbb{S}^1} \longrightarrow \underline{\hat{G}} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$

Si (P, M, G) es un G-haz principal estamos interesados en el problema de encontrar un levantamiendo del G-haz principal a un $\hat{G}$-haz principal con espacio total $\hat{P}$ sobre M. Presentaremos dos métodos de definir una clase característica: la clase de obstrucción y la clase de Dixmier-Douady, ambas son obstrucciones para encontrar tal levantamiento. Posteriormente, veremos que ambas coinciden.

3.3.1. La clase de obstrucción

Proposición 31. *Podemos realizar $B\hat{G}$ como un $B\mathbb{S}^1$-haz principal sobre BG.*

Demostración. Steenrod mostró que la realización de Milgram hace del espacio clasificante E un funtor de la categoría de grupos topológicos y homomorfismos continuos, en sí mismo. De hecho, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \hat{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & E\mathbb{S}^1 \arrow[r, "Bi"] & E\hat{G} \arrow[r, "B\pi"] & EG \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Por la funtorialidad de E, la sucesión inferior es exacta y central. Como $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \hat{G}$ es la inclusión, tenemos que $E\hat{G}/\mathbb{S}^1$ de $B\mathbb{S}^1$ como grupo topológico. Más aun, $E\hat{G}/\mathbb{S}^1$ es un G-haz principal sobre $B\hat{G}$ con identificado canónicamente como subgrupo. Definimos el haz asociado

$$B := \left(EG \times E\hat{G}/\mathbb{S}^1\right)/G \to BG$$

el cual es un $E\hat{G}/\mathbb{S}^1$-haz principal sobre BG. Sin embargo, si proyectamos B en $B\hat{G}$ entonces la fibra es EG, la cual es contraíble. Por lo tanto, B es del tipo de homotopía de $B\hat{G}$, y en consecuencia, es otra realización de $B\hat{G}$. ■

Del Teorema 3.2.2 vemos que si (P, M, G) es un G-haz principal con función clasificante $f : M \to BG$ entonces el G-haz se levanta a un $\hat{G}$-haz si, y sólo si existe un levantamiento de f a $B\hat{G}$. Para encontrar cuando tal levantamiento puede darse usamos el Teorema 3.2.4. El espacio clasificante $B\mathbb{S}^1$ es un $K(\mathbb{Z}, 2)$. Como hemos realizado $B\hat{G}$ como un $B\mathbb{S}^1$-haz, se sigue del Teorema 3.2.2 que no existe un torcimiento en el grupo de coeficientes y que la obstrucción al levantamiento de f es una clase $c\left(f, B\hat{G}\right) \in H^3\left(M, \pi_2\left(B\mathbb{S}^1\right)\right)$. El Teorema 3.2.4 implica que esta es una clase caracterítica. Normalizamos eligiendo un generador de $\pi_2\left(B\mathbb{S}^1\right)$ de tal manera que la clase de Chern de este generador es igual a 1. Sea μ el elemento resultante de $H^2\left(B\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}\right)$ y definamos $C(P) := f^*(\tau(\mu)) \in H^3(M; \mathbb{Z})$. De esta manera $C(P)$ es $c(f, BG) \in H^3\left(M; \pi_2\left(B\mathbb{S}^1\right)\right)$ evaluado con respecto a nuestra elección del generador de $\pi_2\left(B\mathbb{S}^1\right)$.

3.3.2. La clase de Dixmier-Douady

Dado que

$$1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \hat{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta central, tenemos la siguiente sucesión exacta corta central

$$\check{H}^1\left(M; \underline{\mathbb{S}^1}\right) \longrightarrow \check{H}^1\left(M; \underline{\hat{G}}\right) \longrightarrow \check{H}^1\left(M; \underline{G}\right) \xrightarrow{\delta} \check{H}^2\left(M; \underline{\mathbb{S}^1}\right)$$

Definimos una sucesión exacta de conjuntos con un punto distinguido de la siguiente manera. Sean X, Y, Z conjuntos con $x \in X, y \in Y, z \in Z$ y

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión de funciones con punto distinguido, es decir, $f(x) = y$ y $g(y) = z$, entonces la sucesión es exacta en Y si $f(X) = g^{-1}(z)$.

Definimos la aplicación $\delta : \check{H}^1(M; \underline{G}) \to \check{H}^2\left(M; \underline{\mathbb{S}^1}\right)$ como sigue. Consideremos una cubierta buena (U_α) y secciones locales $s_\alpha : U_\alpha \to P$, entonces las funciones de transición de haces están definidas por $s_\beta = s_\alpha g_{\alpha\beta}$. Podemos levantar estas funciones a

$$\hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \hat{G}.$$

Estas funciones no son de transición para un $\hat{G}$-haz. El error es medido por el cociclo

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \hat{g}_{\beta\gamma}\hat{g}_{\alpha\gamma}^{-1}\hat{g}_{\alpha\beta}$$

las cuales toman valores en $\mathbb{S}^1$. Al ser central la sucesión exacta los $e_{\alpha\beta\gamma}$ definen una clase en $\check{H}^2\left(M;\underline{\mathbb{S}^1}\right)$ la cual se anula cuando levantamos el G-haz a un $\hat{G}$-haz.

Tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{\mathbb{S}^1} \longrightarrow 0$$

la cual induce el isomorfismo

$$\varphi : \check{H}^2\left(M;\underline{\mathbb{S}^1}\right) \to \check{H}^3\left(M;\mathbb{Z}\right).$$

De esta manera, $\varphi\left(e_{\alpha\beta\gamma}\right) \in \check{H}^3\left(M;\mathbb{Z}\right)$ es una clase característica, a la que denotamos por $D\left(P\right)$ y llamamos la clase de Dixmier-Douady. Explicitamente, si tomamos $w_{\alpha\beta\gamma}$ de tal manera que $e_{\alpha\beta\gamma} = \exp\left(2\pi i w_{\alpha\beta\gamma}\right)$, entonces la clase de Dixmier-Douady tiene un representante

$$d_{\alpha\beta\gamma\delta} = w_{\beta\gamma\delta} - w_{\alpha\gamma\delta} + w_{\alpha\beta\delta} - w_{\alpha\beta\gamma}.$$

Notemos que si $p \in P_m$, la fibra sobre m, entonces existe un homeomorfismo $G \to P_m$ definido por $g \mapsto pg$. Si $\hat{G}$ es conexo, entonces si tomamos otra p obtenemos un homeomorfismo homotópico, y por lo tanto, existe una identificación única de la cohomología de $\hat{G}$ con la cohomología de P_m.

Teorema 3.3.1. *Sea $P \to M$ un G-haz principal con G 1-conexo. Sea $\hat{G} \to G$ una extensión central de G por $\mathbb{S}^1$. Sea $[\mu]$ la clase de cohomología que la extensión central define en G, y por lo tanto en cualaquier fibra de $P \to M$. Entonces la transgresión de $[-\mu]$ es la clase de Dixmier-Douady del haz $P \to M$.*

Demostración. Recordemos que si X es un espacio topológico y A es un subespacio de X, podemos definir la cohomología con coeficientes enteros $H^*\left(X,A;\mathbb{Z}\right)$ como sigue. Consideremos una cubierta $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ de X y una subcubierta $\mathcal{U}'_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ de A y consideremos la aplicación inducida en complejos de cociclos de Čech para el grupo $\mathbb{Z}$:

$$\varphi : C^p\left(X,\mathcal{U}_{\mathcal{T}}\right) \to C^p\left(A,\mathcal{U}'_{\mathcal{T}}\right)$$

Definimos $C^p\left(\left(X,A\right),\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}},\mathcal{U}'_{\mathcal{T}}\right)\right)$ como el kernel de φ, y definimos

$$H^p\left(\left(X,A\right),\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}},\mathcal{U}'_{\mathcal{T}}\right);\mathbb{Z}\right)$$

como la cohomología del complejo $C^p\left(\left(X,A\right),\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}},\mathcal{U}'_{\mathcal{T}}\right)\right)$. Finalmente definimos

$$H^p\left(X,A;\mathbb{Z}\right)$$

tomando el límite directo de los refinamientos de la cubierta.

Sea $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ una cubierta de M con respecto a la cual la clase de Dixmier-Douady puede ser representada por un cociclo $d_{\alpha\beta\gamma\delta} \in C^3\left(M,\mathcal{U}_{\mathcal{T}}\right)$. Sea α_0 tal que $m_0 \in U_{\alpha_0}$, y sea $\mathcal{U}'_{\mathcal{T}} = \left(U_{\alpha_0}\right)$. Entonces si ξ es un cociclo en $C^3\left(M,\mathcal{U}_{\mathcal{T}}\right)$, luego el cociclo ξ restringido a $C^3\left(M,\mathcal{U}'_{\mathcal{T}}\right)$ es identicamente 0.

Consideremos las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$. El pull-back de $g_{\alpha\beta}$ a P es trivial, pues se cumple que $\pi^* g_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \sigma_\beta^{-1}$, donde $\sigma_\alpha(p)$ está definido por $\sigma_\alpha(s_\alpha(x)\, g) = g$.

Restringidas a cualquier fibra, las aplicaciones $\sigma_\alpha : P_m \to G$ son homeomorfismos. Si cubrimos G con conjuntos abiertos V_a sobre los cuales $\hat{G} \to G$ hay funciones de transición h_{ab} relativas a secciones locales $r_a : V_a \to \hat{G}$, es decir, $r_b = r_a h_{ab}$. Entonces usamos las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \to & U_\alpha \times G \\ p & \mapsto & (\pi(p), \sigma_\alpha(p)) \end{array}$$

para llevar V_a a P y definir conjuntos abiertos $W_{(\alpha,a)} \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$. De esta manera definimos la cubierta $\mathcal{W} := \left(W_{(\alpha,a)}\right)$, la cual es un refinamiento de $\left(\pi^{-1}(U_\alpha)\right)$. Si $\rho_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d}$ es un cociclo para $\left(\pi^{-1}(U_\alpha)\right)$ denotamos por $\rho_{(\alpha_1,a_1),(\alpha_2,a_2),\ldots,(\alpha_d,a_d)}$ a su restricció a $\mathcal{W}$.

En particular el cociclo $\sigma_{(\alpha,a)}$ con valores en G. Podemos dar un levantamiento a $\hat{G}$ por $\hat{\sigma}_{(\alpha,a)} = r_a \circ \sigma_{(\alpha,a)}$. Entonces $\pi^* \hat{g}_{(\alpha,a)(\beta,b)}$ y $\hat{\sigma}_{(\alpha,a)} \hat{\sigma}^{-1}_{(\alpha,a)(\beta,b)}$ son levantamientos de $\pi^* g_{(\alpha,a)(\beta,b)}$, de manera que tenemos

$$\hat{\sigma}_{(\alpha,a)} \hat{\sigma}^{-1}_{(\beta,b)} f_{(\alpha,a)(\beta,b)} = \hat{\pi}^* \hat{g}_{(\alpha,a)(\beta,b)}$$

para un cociclo

$$f_{(\alpha,a)(\beta,b)} : U_{(\alpha,a)} \cap U_{(\beta,b)} \to \mathbb{S}^1.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\pi^* e_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)} = f_{(\beta,b)(\gamma,c)} f^{-1}_{(\alpha,a)(\gamma,c)} f_{(\alpha,a)(\beta,b)}.$$

Tomando $f_{(\alpha,a)(\beta,b)} = \exp\left(2\pi i \nu_{(\alpha,a)(\beta,b)}\right)$ tenemos

$$\pi^* w_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)} = \nu_{(\beta,b)(\gamma,c)} - \nu_{(\alpha,a)(\gamma,c)} + \nu_{(\alpha,a)(\beta,b)} + n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)},$$

para algún $n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)}$ con valores en $\mathbb{Z}$. Finalmente deducimos que

$$\pi^* d_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)(\delta,d)} = n_{(\beta,b)(\gamma,c)(\delta,d)} - n_{(\alpha,a)(\gamma,c)(\delta,d)} + n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\delta,d)} - n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)}.$$

consideremos ahora la cohomología en la fibra P_{m_0}. Definimos una cubierta $\mathcal{W}'$ para P_{m_0} por

$$\mathcal{W}' := (W_a) := \left(W_{(\alpha_0,a)}\right),$$

donde $m_0 \in U_{\alpha_0}$. Haciendo el correspondiente cambio de notación, por ejemplo, $n_{abc} = n_{(\alpha_0,a)(\alpha_0,b)(\alpha_0,c)}$. Tenemos que

$$0 = \pi^* w_{abc} = \nu_{bc} - \nu_{ac} + \nu_{ab} + n_{abc}$$

así que

$$n_{abc} = -\nu_{bc} + \nu_{ac} - \nu_{ab}.$$

Luego,

$$\hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b^{-1} = \hat{\sigma}_{(\alpha_0,a)} \hat{\sigma}^{-1}_{(\alpha_0,b)} = \exp\left(-2\pi i \nu_{ab}\right).$$

Finalmente notemos que $\hat{\sigma}$ está definida por $\hat{\sigma}_{(\alpha,a)} = r_a \circ \sigma_\alpha|_{U_{(\alpha,a)}}$, así que

$$\exp\left(-2\pi i \nu_{ab}\right) = \left(r_a r_b^{-1}\right) \circ \sigma_{\alpha_0} = h_{ab}^{-1} \circ \sigma_{\alpha_0},$$

donde h_{ab} son las funciones de transición de $\hat{G} \to G$.

Finalmente calculamos la transgresión de la clase de Chern. Se sigue de 4.8 que la clase de Chern en $H^2\left(P_{m_0};\mathbb{Z}\right)$ es representada por el cociclo $-n_{abc}$. Utilizando la aplicación de cofrontera en cohomología relativa para obtener esta clase en $H^3\left(P, P_{m_0};\mathbb{Z}\right)$. Primero extendemos n_{abc} a P, y después aplicamos la cofrontera de Čech. Pero obtenemos $n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)}$, la cual es una extensión obvia, y por 4.7 vemos que si aplicamos la cofrontera de Čech a $n_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)}$ obtenemos la clase $\pi^* d_{(\alpha,a)(\beta,b)(\gamma,c)(\delta,d)}$ la cual es el pull-back de la clase de Dixmier-Douady, justamente lo que queriamos probar. ■

3.3.3. La relación entre las dos clases

Teorema 3.3.2. *Si G es 1-conexo, entonces la clase de obstrucción es el negativo de la clase de Dixmier-Douady.*

Demostración. Notemos que el $\mathbb{S}^1$-haz universal $E\mathbb{S}^1 \to B\mathbb{S}^1$ puede ser realizado como $E\hat{G} \to E\hat{G}/\mathbb{S}^1$. Recordemos que G actúa en $E\hat{G}/\mathbb{S}^1$, y por lo tanto tenemos la fibración asociada:

$$\left(EG \times E\hat{G}/\mathbb{S}^1\right)/G \to BG$$

con fibra $B\mathbb{S}^1$. Además observemos que si proyectamos sobre $B\hat{G}$, entonces la fibración tiene fibras contraíbles, luego la fibración es homotópicamente equivalente a $B\hat{G}$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \hat{G} \arrow[r] \arrow[d] & E\hat{G} \arrow[d] \\ G \arrow[r, "f"] & E\hat{G}/\mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

sabemos que $E\hat{G}/\mathbb{S}^1$ es isomorfo a $B\mathbb{S}^1$, en consecuencia, $G \to E\hat{G}/\mathbb{S}^1$ es la aplicación clasificante. Sea μ el generador de $H^2\left(B\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}\right)$. Al ser f la aplicación clasificante, entonces $f^*(\mu)$ es la clase del haz $\hat{G} \to G$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo de fibraciones:

$$\begin{tikzcd} EG \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & B\hat{G} \arrow[d] \\ & BG \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f}$, restringido a las fibras, coincide con la aplicación clasificante f.

Denotemos por $[\mu]$ la clase en una fibra de $B\hat{G} \to BG$ de tal forma que es la clase fundamental en $H^2\left(B\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}$. Luego por el Teorema, tenemos que esto es una transgresión a la clase de obstrucción si el isomorfismo de Hurewicz

$$\pi_3\left(BG\right) \to H_3\left(BG;\mathbb{Z}\right)$$

es sobre. Recordemos que un espacio X se dice que es n-conexo si $\pi_i\left(X\right) = 0$ para $i \leq n$. El teorema de Hurewicz establece que si X es $(n-1)$-conexo, entonces el homomorfismo de Hurewicz es un isomorfismo en dimensiones $i \leq n$, y un epimorfismo en dimensión $n+1$. Ya que los primeros grupos de homotopía no triviales y los primeros grupos de homología no triviales se dan en las mismas dimensiones entonces son isomorfos bajo $h : \pi_i\left(X\right) \to H_i\left(X\right)$, y esto es una condición suficiente para esto es que G sea 2-conexo. Sin embargo, estamos bajo la suposición de que G es -conexo, y en consecuencia BG es 2-conexo. Por el Teorema 3.3.1, la clase $\tilde{f}^*\left([\mu]\right)$ transgrede al negativo de la clase de Dixmier-Douady. Pero por el diagrama de fibraciones, las aplicaciones de transgresión conmutan con $\tilde{f}^*$, y por lo tanto, la obstrucción es el negativo de la clase de Dixmier-Douady. ∎

Apéndice A

Álgebras CCR y espectro de un álgebra C^*

Antes de comenzar de lleno con esta sección introduciremos los conceptos de álgebras CCR, el espectro de un álgebra C^*, traza continua.

Definición A.0.1. *Consideremos un espacio vectorial V con una forma bilineal real antisimétrica y no singular. El álgebra * unitaria generada por los elementos de V tales que*

$$fg - gf = i\,(f, g)$$

$$f^* = f,$$

*para cualquier $f, g \in V$ es llamada **álgebra CCR** (canonical commutation relations).*

Definición A.0.2. *Un **ideal primitivo** es el anulador de un módulo simple.*

Definición A.0.3. *El **espectro primitivo** de A es el conjunto de ideales primitivos $Prim\,(A)$ de A, donde un ideal primitivo es el kernel de una representación *-irreducible.*

Sea A un álgebra sobre un campo. Para cada $T \subset Prim\,(A)$, definimos $I\,(T)$ como la intersección de los elementos de T que son ideales bilaterales de A. Definimos $\overline{T}$ como el conjunto de todos los ideales primitivos de A que contienen $I\,(T)$.

Lema A.0.1. *Si $T \subset Prim\,(A)$, entonces el conjunto $\overline{T}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
2. *si* $T \subset \overline{T}$
3. *si* $\overline{\overline{T}} = \overline{T}$;
4. $\overline{T_1 \cup T_2} = \overline{T_1} \cup \overline{T_2}$.

Definición A.0.4. *El conjunto $Prim\,(A)$ es un espacio topológico donde para cada $T \subset Prim\,(A)$, $\overline{T}$ es la cerradura de T. A esta topología le llamamos topología de Jacobson.*

Definición A.0.5. *El **espectro** de A es el conjunto, denotado $\hat{A}$, con la imagen inversa de la topología de Jacobson bajo la aplicación $\hat{A} \to Prim\,(A)$.*

Sea A un álgebra CCR. Sea $\hat{A}$ su espectro, el cual supondremos separable, y es por lo tanto, paracompacto. Todo elemento $z \in A$ lo identificamos con un ideal primitivo de A, sea $A\left(z\right) := A/z$ un álgebra C^* elemental no nula. Todo $s \in A$ induce una sección continua $z \mapsto s'\left(z\right)$ sobre $\hat{A}$, estas secciones forman una subálgebra involutiva del álgebra involutiva de todas las secciones. Si $s \in A$, la función $z \mapsto \left\|s'\left(z\right)\right\|$ es continua, pues $\hat{A}$ es separable

Apéndice B

Clases características

Una clase característica es una manera de asociar a cada haz principal en un espacio topológico X una clase de cohomología de X. La clase de cohomología mide la desviación del haz con respecto al haz trivial. En particular, si el haz posee secciones o no. En otras palabras, son invariantes globales que miden la desviación de una estructura de producto local a una estructura de producto global. Son un concepto unficador entre la topología algebraica, la geometría diferencial y la geometría algebraica.

La noción de clase característica surgió en 1935 en el trabajo de Stiefel y Whitney acerca de campos vectoriales en variedades.

Definición B.0.6. *Sea G un grupo topológico, y sea X un espacio topológico, denotemos con $b_G(X)$ al conjunto de isomorfismos de clases de G-haces principales, tal b_G es un funtor de la categoría* Top *a la categoría* Set*, y es tal que toma una función continua f y la aplica a su pull-back f^*. Una* ***clase característica*** *c de G-haces principales es una transformación natural de b_G al funtor de cohomología H^*.*

En otras palabras, una clase característica asocia a cualquier G-haz principal $P \to X$ en $b_G(X)$ un elemento $c(P)$ en $H^*(X)$ tal que, si $f : Y \to X$ es continua, entonces $c(f^*(P)) = f^*(c(P))$, donde del lado izquierdo tenemos la clase del pull-back de P a Y, mientras que del lado derecho tenemos la imagen de la clase de P bajo el morfismo inducido por f en cohomología.

Métricas hermitianas

Así como las métricas euclidianas juegan un rol importante en el estudio de haces vectoriales reales, las métricas hermitianas juegan un papel importante en el estudio de los haces vectoriales complejos. Por definición, una métrica hermitiana en un haz vectorial complejo $\omega = (E, B, G)$ es una métrica euclidiana

$$v \mapsto |v|^2 \geq 0$$

sobre el haz vectorial real subyacente que cumple

$$|iv| = |v|.$$

Dada una métrica hermitiana no es difícil mostrar que existe un único producto interno complejo

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2\right) + \frac{i}{2}\left(|v + iw|^2 - |v|^2 - |iw|^2\right),$$

donde v y w están en la misma fibra de ω, y son tales que

1. el producto interno es una función lineal, para algún w fijo;
2. el producto interno es una función compleja conjugada, para algún v fijo;
3. el producto interno cumple que $\langle v, v\rangle = |v|^2$.

Los vectores v y w se dice que son ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$. La identidad hermitiana
$$\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$$
se verifica facilmente, y por lo tanto, v es ortogonal si, y sólo si w es ortogonal a v.

Si el espacio base B es paracompacto, entonces todo haz vectorial sobre B admite una métrica hermitiana.

Construcción de la clase de Chern

Daremos una definición inductiva de las clases características de un haz vectorial complejo ω. En primer lugar, es necesario construir un $(n-1)$-haz canónico ω_0 con espacio total E_0, donde E_0 denota el conjunto de todos los vectores no nulos el el espacio total E. Un elemto de E es caracterizado por una fibra F en ω junto con un vector no nulo v en F. Supongamos que ω tiene una métrica hermitiana. Entonces la fibra de ω_0 sobre v es, por definición, el complemento ortogonal de v en F. Este es un espacio vectorial compacto de dimensión $n-1$, y estos espacios vectoriales podemos pensarlos como las fibras de un nuevo haz vectorial ω_0 con espacio total E_0.

Alternativamente, sin usar una métrica hermitiana, la fibra de ω_0 sobre E_0 puede definirse como el cociente $F/\mathbb{C}v$, donde $\mathbb{C}v$ es el subespacio 1-dimensional generado por $v \neq 0$. En presencia de una métrica hermitiana, es claro que $F/\mathbb{C}v$ es canónicamente isomorfo al complemento ortogonal de v en F.

Recordemos que cualquier $2n$-haz orientado tiene una sucesión exacta de Gysin
$$\cdots \longrightarrow H^{i-2n}(B) \longrightarrow H^{i}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i}(E_0) \longrightarrow H^{i-2n+1}(B) \longrightarrow \cdots$$
con coeficientes enteros. Para $i < 2n-1$ los grupos $H^{i-2n}(B)$ y $H^{i-2n+1}(B)$ son triviales, en consecuencia
$$\pi_0^* : H^{i}(B) \to H^{i}(E_0)$$
es un isomorfismo.

Definición B.0.7. *Las clases de Chern $c_i(\omega) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ están definidas como sigue. Por inducción en la dimensión compleja n de ω. Las clases top de Chern $c_n(\omega) = e(\omega_R)$ coinciden con la característica de Euler. Para $i < n$,*
$$c_i(\omega) := \left(\pi_0^*\right)^{-1}\left(c_i(\omega_0)\right).$$
La clase de Chern está bien definida, ya que $\pi_0^* : H^{2i}(B) \to H^{2i}(E_0)$ es un isomorfismo para $i < n$. Finalmente para $i > n$, $c_i(\omega) = 0$.

La suma formal $c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + \cdots + c_n(\omega)$ está bien definida en el anillo $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z})$. Claramente $c(\omega)$ es una unidad del anillo, así que la clase de Chern inversa está bien definida

$$c(\omega)^{-1} = 1 - c_1(\omega) + \Big(c_1(\omega)^2 - c_2(\omega)\Big) + \cdots .$$

Apéndice C

Pregavillas y Cohomología de Čech

Definición de pregavilla

En este apéndice estudiaremos la nación de pregavillas de conjuntos y grupos abelianos, y sus morfismos, veremos que es un funtor.

Definición C.0.8. *Sea X un espacio topológico. Una* ***pregavilla*** F *de conjuntos de X está dada por:*

1. *Para todo subconjunto U de X, existe un conjunto $\mathsf{F}(U)$;*

2. *Para toda pareja de conjuntos $V \subset U$ de X, existe una aplicación*

$$\rho_V^U : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{F}(V)$$

tal que

- *para todo subconjunto U de X, $\rho_U^U = id_U$*
- *Para los abiertos $W \subset V \subset U$ se tiene que*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}(U) \arrow[r, "\rho_W^U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathsf{F}(W) \\ \mathsf{F}(V) \arrow[ur, "\rho_V^W"'] & \end{tikzcd}$$

Una pregavilla de grupos abelianos sobre X es una pregavilla F de conjuntos tal que

1. $\mathsf{F}(U)$ *es un grupo abeliano;*

2. ρ_V^U *es un homomorfismo de grupos.*

Límite directos

Definición C.0.9. *Un* ***conjunto dirigido*** *de Λ es un conjunto con un preorden $\leq$ tal que para todo α, β en Λ, existe un γ en Λ de manera que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$. A esta condición la denotamos como*

$$\Lambda_1 := \{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda : \alpha \leq \beta\}$$

Definición C.0.10. *Un* ***sistema dirigido*** *de conjuntos indexados por un conjunto dirigido Λ es una familia $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para todo (α,β) en Λ_1, existe una aplicación $\rho_{\alpha\beta} : U_\alpha \to U_\beta$ tal que*

- *para todo α en Λ, $\rho_{\alpha\alpha} = id_{U_\alpha}$;*
- *para todo $\alpha,\beta,\gamma \in \Lambda$ se tiene que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} U_{\alpha\beta} \arrow[r, "\rho_{\alpha\gamma}"] \arrow[d, "\rho_{\alpha\beta}"'] & U_\gamma \\ U_\beta \arrow[ur, "\rho_{\beta\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición C.0.11. *Dado un sistema dirigido, un* ***objetivo*** *para el sistema es un conjunto V y una colección de aplicaciones $(\sigma_\alpha : U_\alpha \to V)_{\alpha\in V}$ tal que para todo $\alpha \leq \beta$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, "\sigma_\alpha"] \arrow[d, "\rho_{\alpha\beta}"'] & V \\ U_\beta \arrow[ur, "\sigma_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Definición C.0.12. *Un* ***límite dirigido*** *para un sistema dirigido, es un objetivo $\big(U, (\tau_\alpha : U_\alpha \to U)_{\alpha\in\Lambda}\big)$ tal que satisface la siguiente propiedad universal: Sea V un objetivo arbitrario con sus aplicaciones σ_α, entonces existe una única aplicación continua $f : U \to V$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$*

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, "\sigma_\alpha"] \arrow[d, "\tau_\alpha"'] & V \\ U \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 32. *Dados dos límites dirigidos para un sistema dirigido, son naturalmente isomorfos, es decir, existe una biyección entre ellos compatible con todos los τ_α.*

Demostración. Sean $\big(U, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\big)$ y $\big(U', (\tau'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\big)$ dos límites directos, al ser U universal y U' un onjetivo existe $f : U \to U'$, análogamente, existe $g : U' \to U$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & U \\ U_\alpha \arrow[ur, "\tau_\alpha"] \arrow[r, "\tau'_\alpha"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"'] & U' \arrow[u, "g"'] \\ & U \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser U un objetivo, y por la propiedad universal, $gf = ib_U$, en consecuencia

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"'] & U \\ & U \arrow[u, "id_U"'] \end{tikzcd}$$

y análogamente, $fg = id_{U'}$. ■

Teorema C.0.3. *Supongamos que* $\left(U, (\tau_\alpha : U_\alpha \to U)_{\alpha \in \Lambda}\right)$ *es un objetivo del sistema* $\left((U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)} \in \Lambda_1\right)$ *tal que*

1. *para todo u en U, existe α en Λ tal que u está en* $\mathrm{Im}\,(\tau_\alpha)$*;*
2. *si α y β están en Λ, y u_α en U_α y u_β en U_β, entonces $\tau_\alpha (u_\alpha) = \tau_\beta (u_\beta)$ si, y sólo si existe γ en Λ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y $\rho_{\alpha\gamma} (u_\alpha) = \rho_{\beta\gamma} (u_\beta)$.*

Entonces U es un límite directo del sistema.

Demostración. Supongamos que $\left(V, (\sigma_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right)$ es otro objetivo. Si $f : U \to V$ satisface la propiedad universal, entonces para u en U, sea α en Λ tal que $u \in \mathrm{Im}\,(\tau_\alpha)$, $u = \tau_\alpha (u_\alpha)$ y $f (u) = \sigma_\alpha (u_\alpha)$. Por lo tanto, si existe f, entonces es única.

Sea $\beta \in \Lambda$ tal que $u \in \mathrm{Im}\,(\tau_\beta)$, sea $u = \tau_\beta (u_\beta)$, entonces por (2), existe γ tal que $\rho_{\alpha\gamma} (u_\alpha) = \rho_{\beta\gamma} (u_\beta)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha (u_\alpha) &= \sigma_\gamma (\rho_{\alpha\gamma} (u_\alpha)) \\ &= \sigma_\gamma (\rho_{\beta\gamma} (u_\beta)) \\ &= \sigma_\beta (u_\beta) . \end{aligned}$$

Así, f está bien definida, y en consecuencia U satisface la propiedad universal. ■

Dado un sistema directo $\left((U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\right)$ de conjuntos. Podemos construir un límite directo. Sea $W = \prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. En W definimos la relación $\sim$. Diremos que u está relacionado con v, $u \sim v$, si, y sólo si $u \in U_\alpha$ y $v \in U_\beta$, entonces existe γ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y tal que $\rho_{\alpha\gamma} (u) = \rho_{\beta\gamma} (u)$. Entonces $\sim$ así definida es una relación de equivalencia.

Sea $U = W/\sim$ y $\tau_\alpha : U_\alpha \to U$,

$$U_\alpha \longrightarrow W \longrightarrow W/\sim$$

Teorema C.0.4. *El conjunto U con las aplicaciones $(\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es un límite directo para el sistema $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces todo sistema directo de conjuntos tiene un límite directo.*

Definición C.0.13. *Un sistema directo de grupos abelianos es un sistema directo de conjuntos $\left((G_\alpha)_{\alpha\in\Lambda'}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\right)$ tal que G_α es un grupo abeliano y $\rho_{\alpha\beta}$ son homomorfismos de grupos.*

Definición C.0.14. *Un objetico para un sistema directo de grupos abelianos es un objetivo* $\left(G, (\sigma_\alpha : G_\alpha \to G)_{\alpha\in\Lambda}\right)$ *para el subyacente sistema directo de conjuntos, junto con la estructura de grupo abeliano de* G *tal que* σ_α *son homomorfismos de grupos.*

Proposición 33. *Dado un sistema directo de grupos abelianos, cualesquiera dos límites directos son naturalmente isomorfos, como grupos abelianos.*

Teorema C.0.5. *Supongamos que* $\left((G_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\right)$ *es un sistema de grupos abelianos y* $\left(G, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right)$ *es un objetivo tal que*

1. *para todo* $g \in G$*, existe* $\alpha \in \Lambda$ *tal que* $g \in \operatorname{Im}(\tau_\alpha)$*;*

2. *para todo* α*,* $g_\alpha \in G_\alpha$*, entonces* $\tau_\alpha(g_\alpha) = 0$ *si, y sólo si existe* β *tal que* $\alpha \leq \beta$ *y* $\rho_{\alpha\beta}(g_\alpha) = 0$*.*

Entonces G *es un límite directo para el sistema.*

Dado un sistema directo, $\left((G_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}\right)$, sea

$$H = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$$

con $i_\alpha : G_\alpha \hookrightarrow H$. Recordemos que H es el subgrupo de $\prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, con operaciones punto a punto, generado por las imágenes de los i_α,

$$(i_\alpha(g_\alpha))_\beta = \begin{cases} g_\alpha, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Sea H_1 un subgrupo de H generado por todos los $i_\alpha(g_\alpha) - i_\beta(\rho_{\alpha\beta}(g_\alpha))$, dado que (α,β) corre sobre Λ_1, entonces g_α corre sobre G_α. Sea $G = H/H_1$ y $\tau_\alpha : G_\alpha \to G$ las aplicaciones naturales.

Teorema C.0.6. *Si* $\left(G, (\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right)$ *es un límite directo del sistema, entonces cualquier sistema directo de grupos abelianos tiene un límite directo.*

Tallos de pregavillas

Sea F una pregavilla (de conjuntos o de grupos abelianos) sonre un espacio topológico X. Sea $x \in X$ fijo, $\mathsf{F}(U)$ es un sistema directo tal que U es abierto y $x \in U$ con aplicaciones $\rho^U_V : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{F}(V)$, donde $x \in V \subset U$.

Definición C.0.15. *El* ***tallo*** F_X *de* F *en* x *es el límite directo,*

$$\varinjlim_{x\in U} \mathsf{F}(U),$$

con aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{F}(U) & \to & \mathsf{F}(V) \\ s & \mapsto & s_X \end{array},$$

donde $x \in U$*. A los elementos de* F_X *se les suele llamar gérmenes (o secciones de* F*).*

Proposición 34. 1. *Todo germen $t \in \mathsf{F}_X$ podemos pensarlo como $t = s_X$, para algún $s \in \mathsf{F}(U)$, donde U es una vecindad abierta de X.*

2. *Dos gérmenes s_X y t_X en F_X, donde $s \in \mathsf{F}(U)$ y $t \in \mathsf{F}(V)$, son iguales si, y sólo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$.*

Morfismos de pregavillas

Definición C.0.16. *Si F y G son pregavillas de conjuntos sobre X, un morfismo $f : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ está dado por $f(U) : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{G}(U)$, para cada abierto U de X tal que $V \subset U$ es abierto en X, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathsf{G}(U) \arrow[d, "\rho_V'^U"] \\ \mathsf{F}(V) \arrow[r, "f(V)"] & \mathsf{G}(V) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si F y G son pregavillas de grupos abelianos, entonces $f : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ es un morfismo de pregavillas de grupos abelianos si, y sólo si $\mathsf{F}(U) : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{G}(U)$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Decimos que $f : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ es un isomorfismo de pregavillas si, y sólo si existe $g : \mathsf{G} \to \mathsf{F}$ tal que $fg = id_{\mathsf{G}}$ y $gf = id_{\mathsf{F}}$, donde $id_{\mathsf{F}} : \mathsf{F} \to \mathsf{F}$ está definida por $id_{\mathsf{F}}(U) = id_{\mathsf{F}(U)}$ para cada $U \subset X$.

Proposición 35. *Tenemos que $f : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ es un isomorfismo de pregavillas si, y sólo si para todo $U \subset X$ abierto, $f(U) : \mathsf{F}(U) \to \mathsf{G}(U)$ es un isomorfismo de grupos abelianos si, y sólo si $f(U)$ es biyectiva.*

Dado un morfismo de pregavillas $f : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ en X, para cada $x \in X$ podemos definir un morfismo de tallos $f_x : \mathsf{F}_x \to \mathsf{G}_x$ de tal forma que

$$\mathsf{F} \xrightarrow{f} \mathsf{G} \xrightarrow{g} \mathsf{H},$$

$$(gf)_x = g_x f_x.$$

Dado $x \in X$, definimos f_x como sigue, diremos que cualquier $e \in F_x$ es de la forma $e = s_x$, para algún $x \in U$ abierto, y algún $s \in F(U)$. Tomamos $f_x(e) = (f(U)(s))_x$. Si además $e = s_x = t_x$ y $t \in F(V)$, entonces existe $W \subset U \cap V$ tal que $x \in W$ y $\rho_W^U = \rho_W^V$ se sigue que

$$\begin{aligned} \rho_W^U(f(U)(s)) &= f(W)\,\rho_W^U(s) \\ &= f(W)\,\rho_W^V(t) \\ &= \rho_W^V(f(V)(t)), \end{aligned}$$

en consecuencia $(f(U)(s))_x = (f(V)(t))_x$, y f_x está bien definida. La funtorialidad

$$\begin{aligned} (gf)_x &= g_x f_x \\ (id_F)_x &= id_{F_x} \end{aligned}$$

es evidente.

Cohomología de Čech

Definición C.0.17. *Sea I un conjunto. Para $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$[0,n] := \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq m < n\}.$$

Diremos que un n-simplejo en I es una función $\sigma : [0,n] \to I$. El conjunto de los n-simplejos lo denotaremos por I_n.

Para $0 \leq m < n+1$ definimos la aplicación que omite el m-ésimo vértice

$$\partial_m : I_{n+1} \to I_n,$$

la definimos por $\partial_m(\sigma) = \sigma'$, donde

$$\sigma' : k \mapsto \begin{cases} \sigma(k), & k < m \\ \sigma(k+1), & k \geq m \end{cases}.$$

Sea X un espacio topológico y F una pregavilla de grupos abelianos. Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta de X. Para un n-simplejo $\sigma \in I_n$ definimos

$$\bigcap := \left\{U_{\sigma(m)} : m \in [0,n]\right\},$$

el cual es un abierto de X. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $C^n(\mathcal{U};\mathsf{F}) = \prod_{\sigma\in I_n} \mathsf{F}(U_\sigma)$, el cual es un grupo abeliano, y denotemos como (s_σ) al elemento cuya σ-ésima coordenada es s_σ.

Las aplicaciones ∂_m inducen

$$\partial_m : C^n(\mathcal{U};\mathsf{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{U};\mathsf{F})$$

definida por

$$(s_\sigma) \mapsto (t_{\sigma'}),$$

donde $t_{\sigma'} = s_{\partial_m \sigma'}$ y definimos para cada n,

$$d_n := \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \partial_m : C^n(\mathcal{U};\mathsf{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{U};\mathsf{F})$$

la pareja $(C^*(\mathcal{U};\mathsf{F}), d_n)$ es un complejo de cadenas, llamado el complejo de Čech relativo a $\mathcal{U}$ y F, y su cohomología

$$\check{H}^n(\mathcal{U};\mathsf{F}) \cong H^n(C^*(\mathcal{U};\mathsf{F}))$$

es la cohomología de Čech de F con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$. La construcción de $C^*(\mathcal{U};\mathsf{F})$ y $\check{H}^*(\mathcal{U};\mathsf{F})$ es funtorial en la pregavilla F.

Dadas dos cubiertas $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{i\in J}$, decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si, y sólo si existe una aplicación recubridora $r : J \to I$ tal que para todo $j \in J$, $V_i \subset U_{r(j)}$. La aplicación r induce un morfismo de complejos

$$r : C^*(\mathcal{U};\mathsf{F}) \to C^*(\mathcal{V};\mathsf{F}),$$

deducida de las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\sigma\in I_n}\mathsf{F}\left(U_\sigma\right) & \to & \prod_{\tau\in J_n}\mathsf{F}\left(V_\tau\right)\\ \left(s_\sigma\right) & \mapsto & \left(t_\tau\right)\end{array},$$

donde $t_\tau = \rho_{V_\tau}^{U_{r(\tau)}}\left(s_{r(\tau)}\right)$.

Luego r induce un morfismo en la cohomología de Čech

$$r^* : \check{H}^n\left(\mathcal{U};\mathsf{F}\right) \to \check{H}^n\left(\mathcal{V};\mathsf{F}\right).$$

Lema C.0.2. *Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, y $r_1, r_2 : J \to I$ son aplicaciones refinadoras, entonces inducen el mismo morfismo en la cohomología de Čech.*

Demostración. Consideremos las aplicaciones $r_1' \simeq r_2'$, las cuales son morfismos homotópicos de complejos. Por la homotopía:

$$\begin{array}{cccc}k_n: & C^{n+1}\left(\mathcal{U};\mathsf{F}\right) & \to & C^n\left(\mathcal{V};\mathsf{F}\right)\\ & \left(s_\sigma\right) & \mapsto & \left(t_\sigma\right)\end{array},$$

donde

$$t_\tau = \sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{-1}\rho_{V_\tau}^{U_{\tau_k}}\left(s_{\tau_k}\right),$$

y donde

$$\tau_k\left(m\right) = \begin{cases} r_1\left(\tau\left(m\right)\right), & m \leq k\\ r_2\left(\tau\left(m-1\right)\right), & m > k\end{cases},$$

$m \in [0, n+1]$. ■

Por lo tanto, los grupos abelianos $\check{H}^n\left(\mathcal{U};\mathsf{F}\right)$ forman un sistema dirigido con $\mathcal{U}$ variando sobre X, y definimos la cohomología de Čech de una pregavilla F en X como

$$\check{H}^n\left(X;\mathsf{F}\right) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^n\left(\mathcal{U};\mathsf{F}\right)$$

sobre cubiertas cada vez más finas.

Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, entonces el morfismo $r' : C^*\left(\mathcal{U};\mathsf{F}\right) \to C^*\left(\mathcal{V};\mathsf{F}\right)$ depende de la elección de r, mientras que r^* no.

Apéndice D

Cohomología homotópica y cohomología de Čech

Introducción

Sea $K(G,n)$ un complejo de Eilenberg-MacLane, es decir, un complejo CW cuyo grupo de homotopía en dimensión n es G, y todos los demás son triviales. El n-ésimo grupo de cohomología homotópica $H^n(X;G)$ de un espacio X se define como el grupo de clases de homotopía de aplicaciones $X \to K(G,n)$, el grupo estructural es inducido por cualquiera de las H-estructuras de $K(G,n)$. Es irrelevante si consideramos sólo aplicaciones que preservan el punto base o todas las aplicaciones, y es lo que hacemos aquí, pues puede mostrarse que para todo $n > 0$ obtenemos los mismos grupos.

Probaremos que para espacios X que son paracompactos, y además Hausdorff, el grupo de cohomología homotópica $H^n(X;G)$ es isomorfo con el grupo de cohomología de Čech $\check{H}^n(X;G)$, siempre que G sea numerable o que X sea un k-espacio.

Esta afirmación o similares parecen ser conocidas sólo para el caso particular en el que X es un poliedro, o bien, un espacio compacto; se han probado los siguientes casos:

1. por una aplicación de la teoría de obstrucción, y de esta manera estableciendo una correspondencia inyectiva entre las clases de homotopía y los elementos de algún grupo de cohomología;

2. verificando los axiomas de Eilenberg-MacLane, los cuales son válidos si X es un espacio normal, y entonces aplicando varios teoremas de unicidad;

3. por una identifición directa de los grupos de cohomología con los grupos simpliciales de un complejo.

La prueba que damos aquí es diferente y es interesante por sí misma. La idea principal es realizar el espacio $K(G,n)$ como un grupo topológico e investigar la cohomología de pregavillas de una pregavilla de gérmenes de una función continua $K(G,n)$. A lo largo de este apéndice utilizamos la cohomología de pregavillas en el sentido de Grothendieck-Godement, la cual es isomorfa a la cohomología de Čech si X es paracompacto.

Contractibilidad local

Lema D.0.3. *Sea Y un espacio del tipo de homotopía de un CW complejo. Entonces Y es debilmente localmente contraíble, es decir, cada punto $y \in Y$ tiene una vecindad U la cual es contraíble en Y.*

Demostración. Es bien conocido que los complejos simpliciales son debilmente localmente contraíble, y ya que esta propiedad es un invariante del tipo de homotopía, la afirmación se sigue. ∎

Lema D.0.4. *Sea Y conexo por caminos, y sea EY el espacio de caminos que comienzan en algún punto fijo $y \in Y$. La fibración $P : EY \to X$, la cual aplica cada trayectoria a su punto final, admite secciones locales si, y sólo si Y es debilmente localmente contraíble.*

Demostración. Supongamos que Y es debilmente localmente contraíble, y sea U una vecindad de y contraíble en Y. Al ser Y conexo por trayectorias, entonces existe una contracción $\varphi : U \times I \to Y$ que contrae U a y. Entonces podemos definir una sección local $\psi : U \to EY$ por $\psi(u)(t) = \varphi(u,t)$. Reciprocamente, cada sección local define una contracción local. ∎

$K(G,n)$-pregavillas

De acuerdo a Milnor, existen complejos CW que son espacios $K(G,n)$, y que además son grupos topológicos abelianos, si G es numerable. Denotamos por $G^k = \Omega^{n-k}K(G,n)$ a los espacios de lazos $(n-k)$-hojas interados en $K(G,n)$; G^k es un espacio $K(G,k)$ del tipo de homotopía de un complejo CW. El grupo estructural en $K(G,n)$ induce un grupo topológico estructural en G^k y en su espacio de caminos EG^k. Tenemos la sucesión exacta de grupos topológicos

$$0 \longrightarrow G^{k-1} \xrightarrow{j} EG^k \xrightarrow{p} G^k \longrightarrow 0\ ,$$

donde j y p son la inclusión y la proyección, respectivamente.

Sean $\underline{G^k}$ y $\underline{EG^k}$ las pregavilas de gérmenes de funciones continuas en un espacio X con valores en G^k y EG^k, respectivamente.

Lema D.0.5. *La sucesión exacta,*

$$0 \longrightarrow G^{k-1} \xrightarrow{j} EG^k \xrightarrow{p} G^k \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta de pregavillas

$$0 \longrightarrow \underline{G^{k-1}} \xrightarrow{j_*} \underline{EG^k} \xrightarrow{p_*} \underline{G^k} \longrightarrow 0\ .$$

Demostración. La exactitud del lado derecho es clara. Luego, tenemos que $p_* j_* = 0$, pues $j : G^{k-1} \to EG^k$ es un homeomorfismo, así cada germen de $\underline{EG^k}$ que es aplicado a 0 por p_*, es la imagen de algún germen de $\underline{G^{k-1}}$, en consecuencia, tenemos la excatitud en el término central. Finalmente, por el Lema D.0.2, G^k es debilmente localmente contraíble. Al ser G^k conexo por caminos para $k > 0$, tenemos que p admite secciones locales, por el Lema D.0.3, y por lo tanto, p_* es sobre. ■

Lema D.0.6. *Sea X un espacio Hausdorff paracompacto. Si el espacio E es contraíble, entonces la pregavilla $\underline{E}$ de gérmenes de funciones continuas $X \to E$ es suave.*

Demostración. Debemos probar que cualquier sección s de $\underline{E}$ sobre un subconjunto cerrado $A \subset X$ podemos extenderla a una sección continua en X, podemos representar s por una función continua $s' : U \to E$, donde U es una vecindad abierta de A. Ya que un espacio paracompacto es normal, podemos definir conjuntos abiertos V, W de tal forma que

$$U \supset \overline{V} \supset V \supset \overline{W} \supset W \supset A.$$

Por el Lema de Urysohn, tenemos una función de valores reales $f : X \to I$, definida por $f(x) = 0$ si $x \in \overline{W}$ y $f(x) = 1$ si $x \notin V$. Sea $\varphi : E \times I \to E$ una contracción de E: $\varphi(x, 0) = x$, $\varphi(x, 1) = 0$. Definimos

$$\begin{aligned} s''(x) &= \varphi\left(s'(x), f(x)\right), \quad x \in U \\ s''(x) &= 0, \quad x \notin U. \end{aligned}$$

Por definición, s'' es continua, y tenemos $s''(x) = s'(x)$ para $x \in W$. Por lo tanto, s'' es una extensión de s. ■

Sucesiones exactas de cohomología de pregavillas

Proposición 36. *Sea X un espacio Hausdorff paracompacto, G^0 un grupo topológico abeliano, y Q un subgrupo abierto y cerrado de G^0. Por $\underline{G^0}$ denotamos la pregavilla de gérmenes de funciones continuas $X \to G^0$. Si Q es contraíble, entonces*

$$\check{H}^m\left(X; \underline{G^0}\right) \to \check{H}^m\left(X; G^0/Q\right)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sean $\underline{Q}$ y $\underline{G}$ las pregavillas de funciones continuas en X con valores en Q y $G = G^0/Q$. Al ser G discreto, $\underline{G}$ es una pregavilla constante. Entonces tenemos una sucesión exacta de pregavillas

$$0 \longrightarrow \underline{Q} \longrightarrow \underline{G^0} \longrightarrow \underline{Q} \longrightarrow 0\ .$$

El término $\underline{Q}$ es suave, por el Lema D.0.5, por lo tanto, $\check{H}^m\left(X; \underline{Q}\right) = 0$, para $m > 0$. La sucesión exacta en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^m\left(X; \underline{Q}\right) \longrightarrow \check{H}^m\left(X; \underline{G^0}\right) \longrightarrow \check{H}^m\left(X; \underline{G}\right) \longrightarrow \check{H}^{m+1}\left(X; \underline{Q}\right) \longrightarrow \cdots$$

implica que $\check{H}^m\left(X;\underline{G^0}\right) \to \check{H}^m\left(X;\underline{G}\right)$ es un isomorfismo, para $m>0$. Finalmente, al tener que $\check{H}^m\left(X;G\right) = \check{H}^m\left(X;\underline{G}\right)$, se sigue la afirmación. ∎

Tenemos la sucesión exacta del Lema D.0.4

$$0 \longrightarrow \underline{G^{k-1}} \xrightarrow{j_*} \underline{EG^k} \xrightarrow{p_*} \underline{G^k} \longrightarrow 0\ ,$$

y consideremos su sucesión exacta larga inducida en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^m\left(X;\underline{G^{k-1}}\right) \longrightarrow \check{H}^m\left(X;\underline{EG^k}\right) \longrightarrow \check{H}^m\left(X;\underline{G^k}\right) \longrightarrow \check{H}^{m+1}\left(X;\underline{G^{k-1}}\right) \longrightarrow \cdots$$

El Lema D.0.5 implica que $\underline{EG^k}$ es suave, entonces $H^m\left(X;\underline{EG^k}\right) = 0$ para $m>0$. Por lo tanto,

$$\check{H}^m\left(X;\underline{G^{k-1}}\right) \to \check{H}^m\left(X;\underline{G^k}\right)$$

es un isomorfismo, luego

$$\check{H}^1\left(X;\underline{G^{k-1}}\right) \cong \check{H}^0\left(X;\underline{G^k}\right)/\mathrm{Im}\check{H}^0\left(X;\underline{EG^k}\right),$$

y así,

$$\check{H}^n\left(X;\underline{G^0}\right) \cong \check{H}^0\left(X;\underline{G^n}\right)/\mathrm{Im}\check{H}^0\left(X;\underline{EG^n}\right),$$

$\check{H}^0\left(X;\underline{G^n}\right)$ es el grupo de aplicaciones globales $X \to K\left(G,n\right)$, $\mathrm{Im}\check{H}^0\left(X;\underline{EG^k}\right)$ es el subgrupo que consiste de aquellas aplicaciones que pueden ser factorizadas a través de $EK\left(G,n\right) \to K\left(G,n\right)$, es decir, precisamente las aplicacaciones homotópicas a una constante. Por lo tanto, tenemos el siguiente isomorfismo entre la cohomología de Čech y la cohomología homotópica:

$$\check{H}^n\left(X;\underline{G^0}\right) \cong H^n\left(X;G\right),$$

Teorema D.0.7. *Sea X un espacio Hausdorff paracompacto. Entonces el grupo de cohomología homotópica $H^n\left(X;G\right)$ es isomorfo al grupo de cohomología de Čech $\check{H}^n\left(X;\underline{G}\right)$ si G es numerable, o bien, X es un k-espacio.*

Demostración. Si G es numerable, el teorema se sigue de la Proposición anterior, ya que el componente del elemento cero de $G^0 = \Omega^n K\left(G,n\right)$ tiene grupos de homotopía triviales, y es por lo tanto, contraíble. Si G no es numerable, entonces el grupo operación en la realización de Milnor

$$m : K\left(G,n\right) \times K\left(G,n\right) \to K\left(G,n\right)$$

no es necesariamente continua. Sin embargo, una inspección más cercana muestra que la continuidad de m sólo es necesaria para garantizar que la suma $s' + s''$ de dos funciones localmente continuas $s', s'' : U \to G^k$ y EG^k, respectivamente, es continua. Así que introducimos un grupo estructural en las pregavillas. Dado que la restricción de m a subespacios compactos es continua en cualquier caso, se sigue que $s' + s'' : U \to K\left(G,n\right)$ es continua en compactos, lo que implica continuidad, si X es un k-espacio. Para los espacios G^k y EG^k, es un necesario un argumento más complicado. En primer lugar, reemplzamos el conjunto de aplicaciones $Map\left(U, G^k\right)$ de manera canónica por el subconjunto de $Map\left(U \times S_{n-k}, K\left(G, n\right)\right)$ que consiste de aquellas aplicaciones que $U \times \{0\} \mapsto 0$. Un resultado de Spanier implica que $X \times S_{n-k}$ es un k-espacio, y la continuidad de $s' + s''$ se sigue. Una consideración análoga muestra lo mismo para los espacios EG^k. ∎

Bibliografía

[1] Alexandru Gabriel Atim. *Uniqueness results for the infinite unitary, orthogonal and associated groups.* PhD thesis, University of North Texas, 2008.

[2] V. Bargman. On unitary ray representations of continuos groups. *Annals of mathematics*, 59(1):pp. 1–46, Enero 1954.

[3] J. Dugundji. An extension of Tietze's theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 1951.

[4] J. M. G. Fell. The structure of algebras of operator fields. *Acta mathematica*, 106:233–280, 1961.

[5] R. Godement. Topologie algébrique et théorie de faisceaux. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66(1), 1960.

[6] Alexandre Grothendieck. *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* 1955.

[7] Serre J-P. Extensions des applications-homotopic. *Séminaire Henri Cartan*, 2(1):1–6, 1949-1950.

[8] Shizuo Kakutani. Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 19:269–271, 1943.

[9] Irving Kaplansky. Normed algebras. *Duke math.*, 16:399–418, 1949.

[10] Irving Kaplansky. The structure of certain operator algebras. *Trans. American Mathematical Society*, 70:219–255, 1951.

[11] E. Michael. Continuous selections. *Annals of Mathematics*, 1956.