“El saber de mis hijos hará mi grandeza”

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Programa de Posgrado en Matemáticas

Estabilidad de juegos estocásticos suma cero respecto a métricas de probabilidad

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Susana Hernández Núñez

Director de tesis: Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Hermosillo, Sonora, México, 8 de agosto de 2024

SINODALES

Dr. Yofre Hernán García Gómez

Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutierrez, México

Dra. Carmen Geraldi Higuera Chan

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Óscar Vega Amaya

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

En memoria a mi padre
Manuel Hernández Pérez

Índice general

Notación

$\blacksquare$ Fin de una prueba

$:=$ Igualdad por definición

$1_D(\cdot)$ Función indicadora del conjunto D

i.i.d. Independiente e idénticamente distribuida

l.s.c. Semicontinua inferiormente

u.s.c. Semicontinua superiormente

$\mathbb{N}$ El conjunto de enteros positivos $\{1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ El conjunto de enteros no negativos $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{R}$ El conjunto de números reales

Un *espacio de Borel* es un subconjunto de Borel de un espacio métrico completo y separable. Para un espacio Borel X, se utiliza la siguiente notación:

$\mathcal{B}(X)$ σ-álgebra de Borel de subconjuntos de X

$C(X)$ Espacio de Banach de funciones acotadas y continuas en X

$B(X)$ Espacio de funciones medibles y acotadas en X

$L(X)$ Espacio de funciones semicontinuas inferiormente y acotadas por debajo en X

$\mathbb{P}(X)$ Espacio de medidas de probabilidad de X

$\mathbb{P}(X|Y)$ Familia de kerneles estocásticos en X dado Y, donde X e Y son espacios de Borel

Introducción

En esta tesis se estudia una clase de juegos de Markov suma cero a tiempo discreto definidos sobre espacios de Borel, cuya evolución en el tiempo se describe a continuación. Se tienen 2 jugadores, jugador 1 y jugador 2. En cada etapa del juego, ambos observan el estado actual x e independientemente eligen acciones a y b, respectivamente. Entonces el jugador 1 recibe un pago $r(x, a, b)$ del jugador 2 y el juego se mueve a un nuevo estado de acuerdo a una ley de transición. Es decir, $r(x, a, b)$ representa la ganancia para el jugador 1 y el costo para el jugador 2. Durante la evolución del juego, las acciones son seleccionadas por los jugadores 1 y 2 por medio de reglas π^1 y π^2, respectivamente, llamadas estrategias, y los pagos se acumulan en un horizonte infinito bajo ciertos criterios de optimalidad. En nuestro caso se considera los criterios de pago descontado y de pago promedio, cuyos índices de funcionamiento se denota por $V(x, \pi^1, \pi^2)$ y $J(x, \pi^1, \pi^2)$, respectivamente, donde x es el estado inicial.

El problema del juego puede ser planteado de la siguiente manera. Sea I un índice de funcionamiento, ya sea V o J. Se define los valores inferior y superior del juego como

$$L(x) = \sup_{\pi^1} \inf_{\pi^2} I(x, \pi^1, \pi^2) \quad \text{y} \quad U(x) = \inf_{\pi^2} \sup_{\pi^1} I(x, \pi^1, \pi^2).$$

Si $U(\cdot) = L(\cdot) = I(\cdot)$, se dice que el juego tiene un valor I. Entonces, si el juego tiene un valor I, el problema es encontrar un par de estrategias (π_*^1, π_*^2) tal que

$$I(x, \pi^1, \pi_*^2) \leq I(x, \pi_*^1, \pi_*^2) := I(x) \leq I(x, \pi_*^1, \pi^2),$$

para todas las estrategias posibles π^1 y π^2.

Existe una amplia literatura en el estudio de esta clase de juegos que abordan múltiples clases de problemas, por ejemplo, trabajos enfocados a mostrar la existencia de pares óptimos debilitando condiciones, otros introduciendo métodos de aproximación de estrategias, o proponiendo esquemas de estimación estadística y control en juegos con distribución desconocida, entre muchos mas (véase, e.g., [5, 16–24, 29, 31]). Excepto los trabajos [19, 20, 22, 23], regularmente se supone que todas las componentes del modelo que describen el juego son conocidas, lo cual en ciertas situaciones puede ser una hipótesis fuerte. Específicamente, en dichos trabajos se considera el caso cuando la distribución del proceso de perturbaciones aleatorias en el juego es observable con distribución desconocida. Esta es la clase de problemas que se interesa estudiar pero desde un punto de vista mas general, donde la distribución puede ser arbitraria y el proceso aleatorio no necesariamente observable. Esta generalidad se obtiene a partir del análisis de una clase de estabilidad en juegos estocásticos.

La palabra "estabilidad" tiene un amplio significado en las diferentes áreas de las matemáticas. En el contexto del presente trabajo, el estudio de la "estabilidad" se hará en el siguiente sentido. Se tiene un modelo $\mathcal{M}$ correspondiente al problema que se quiere resolver. Sin embargo, su solución no es accesible o es difícil de obtener ya que algunas componentes son desconocidas o intratables desde el punto de vista práctico. Entonces se considera un modelo $\widetilde{\mathcal{M}}$ que aproxima, en cierto sentido, a $\mathcal{M}$, y donde es posible encontrar una solución. Dicha solución se aplica en el modelo original de tal manera que el objetivo es medir su desviación de optimalidad. Este procedimiento ha sido aplicado en procesos de control de Markov asumiendo que la distribución del ruido aleatorio correspondiente es desconocida (véase, e.g., [9, 10]). Entonces, el objetivo del presente trabajo es extender estos resultados a juegos suma cero.

Específicamente, se considera un juego suma cero donde el proceso de estados $\{x_t\}$ evoluciona de acuerdo a una ecuación en diferencia de la forma

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, b_t, \xi_t), \quad t = 0, 1, ...,$$

donde (a_t, b_t) representan las acciones elegidas por los jugadores 1 y 2, respectivamente al tiempo t, y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución G. Se supone que G es al menos parcialmente desconocida, y puede ser aproximada por cierta distribución conocida $\widetilde{G}$. Por ejemplo, $\widetilde{G}$ puede ser obtenida mediante algunas consideraciones teóricas o por un método de estimación estadística en el caso de que el proceso $\{\xi_t\}$ sea observable. Bajo este escenario podemos considerar el proceso de estados del juego aproximado

$$\tilde{x}_{t+1} = F(\tilde{x}_t, a_t, b_t, \tilde{\xi}_t), \quad t = 0, 1, ...,$$

donde $\left\{\tilde{\xi}_t\right\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\widetilde{G}$. Entonces, al analizar el problema de juego correspondiente se puede obtener un par de estrategias óptimas $(\widetilde{\pi}^1_*, \widetilde{\pi}^2_*)$. La idea de "estabilidad" en nuestro caso es considerar $(\widetilde{\pi}^1_*, \widetilde{\pi}^2_*)$ como una aproximación razonable del par (π^1_*, π^2_*), y medir su desviación. Es decir, $(\widetilde{\pi}^1_*, \widetilde{\pi}^2_*)$ es aplicado para controlar el juego original y su desviación de optimalidad lo miden las relaciones

$$\Delta^1(x) = \left|\inf_{\pi^2} I(x, \tilde{\pi}^1_*, \pi^2) - I(x)\right|$$

y

$$\Delta^2(x) = \left|\sup_{\pi^1} I(x, \pi^1, \tilde{\pi}^2_*) - I(x)\right|.$$

En este sentido, el objetivo es estimar $\Delta^1(x)$ y $\Delta^2(x)$ por medio de desigualdades definidas en términos de métricas de probabilidad como las siguientes:

$$\Delta^1(x) \leq C^1(x)\mu(G, \widetilde{G}) \;\text{ y }\; \Delta^2(x) \leq C^2(x)\mu(G, \widetilde{G}),$$

para algunas funciones C^1, C^2, donde μ es una métrica de probabilidad en el espacio de distribuciones de $\{\xi_t\}$. Una vez que se tienen estas desigualdades se muestra que

$$I(x, \pi^1, \widetilde{\pi}^2_*) - C^2(x)\mu(G, \widetilde{G}) \leq I(x) \leq I(x, \widetilde{\pi}^1_*, \pi^2) + C^1(x)\mu(G, \widetilde{G}).$$

De aquí, conforme $\widetilde{G}$ aproxime mejor a G, lo cual lo mide $\mu(G, \widetilde{G})$, el par $(\widetilde{\pi}^1_*, \widetilde{\pi}^2_*)$ aproxima mejor a (π^1_*, π^2_*). Dicha aproximación se estudia en los casos cuando μ representa a la métrica de Variación Total y a la métrica de Kantorovich, bajo los criterios de optimalidad descontado y promedio.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presentan los elementos de la teoría de juegos suma cero, mientras que en el Capítulo 2 se introduce el problema del juego para los criterios de optimalidad descontado y promedio. El problema de estabilidad para ambos criterios se estudia en los Capítulos 3 y 4, respectivamente. Para finalizar se presenta un Apéndice con los resultados auxiliares.

Capítulo 1

Elementos de juegos suma cero

1.1. Modelos de juego

Un modelo de juego de Markov de suma cero está definido por la colección

$$\mathcal{GM} := (X, A, B, \mathbb{K}_A, \mathbb{K}_B, Q, r), \tag{1.1}$$

donde

a) X es un espacio de Borel llamado espacio de estados;

b) A, B son espacios de Borel representando los conjuntos de acciones para los jugadores 1 y 2, respectivamente;

c) $\mathbb{K}_A$ y $\mathbb{K}_B$ son conjuntos de restricciones para los jugadores 1 y 2. Además, para cada $x \in X$, los conjuntos

$$A(x) := \{a \in A : (x, a) \in \mathbb{K}_A\}$$

y

$$B(x) := \{b \in B : (x, b) \in \mathbb{K}_B\}$$

representan los conjuntos de controles o acciones admisibles para los jugadores 1 y 2, respectivamente, y el conjunto

$$\mathbb{K} = \{(x, a, b) : x \in X,\ a \in A(x),\ b \in B(x)\},$$

de tripletes estado-acciones admisibles es un subconjunto de Borel de $X \times A \times B$.

d) $Q(\cdot|\cdot)$ es un kernel estocástico en X dado $\mathbb{K}$, llamado la ley de transición, i.e,

$$Q(D|x,a,b) = Pr[x_{t+1} \in D | x_t = x, a_t = a, b_t = b],\ D \in \mathcal{B}(X); \tag{1.2}$$

e) $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es una función medible que representa la función de pago por etapa.

El juego se desarrolla de la siguiente manera:

- Al tiempo $t \in \mathbb{N}_0$, los jugadores observan el estado del juego $x_t = x \in X$.
- Entonces los jugadores 1 y 2 seleccionan, independientemente, acciones $a_t = a \in A(x)$ y $b_t = b \in B(x)$, respectivamente.
- Como consecuencia, el jugador 1 recibe un pago $r(x,a,b)$ del jugador 2, y el juego evoluciona a un nuevo estado $x_{t+1} = y \in X$, según la ley de transición $Q(\cdot|x,a,b)$.

Una vez que el juego este en el nuevo estado, el proceso se repite y los pagos se acumulan de acuerdo a un índice de funcionamiento. Por lo tanto, el objetivo del jugador 1 es maximizar su recompensa total, contrario al jugador 2 que desea minimizar el costo total.

1.2. Estrategias

Los jugadores seleccionan las acciones mediante reglas llamadas estrategias que se definen a continuación.
Sea $H_0 := X$ y $H_t := \mathbb{K} \times H_{t-1}$ para $t \in \mathbb{N}$. Un elemento de H_t está dado por

$$h_t := (x_0, a_0, b_0, \ldots, x_{t-1}, a_{t-1}, b_{t-1}, x_t)\,,$$

que representa la historia del juego hasta el momento t. Por otro lado, para $x \in X$, definimos $\mathbb{A}(x) := \mathbb{P}(A(x))$ y $\mathbb{B}(x) := \mathbb{P}(B(x))$, así como los conjuntos de kerneles estocásticos

$$\Phi^1 := \{\varphi^1 \in \mathbb{P}(A|X) : \varphi^1(\cdot|x) \in \mathbb{A}(x),\ \forall\, x \in X\};$$

$$\Phi^2 := \{\varphi^2 \in \mathbb{P}(B|X) : \varphi^2(\cdot|x) \in \mathbb{B}(x),\ \forall\, x \in X\}.$$

Definición 1.1. *a) Una estrategia para el jugador 1 es una sucesión* $\pi^1 = \{\pi_t^1\}$ *de kerneles estocásticos* $\pi_t^1 \in \mathbb{P}(A|H_t)$ *tal que:*

$$\pi_t^1 \left(A\left(x_t\right)|h_t\right) = 1, \quad \forall\, h_t \in H_t,\ t \in \mathbb{N}_0.$$

Se denota por Π^1 *la familia de todas las estrategias para el jugador 1.*

b) Una estrategia $\pi^1 = \{\pi_t^1\} \in \Pi^1$ *se llama estrategia de Markov si,* $\pi_t^1 \in \Phi^1$*, para* $t \in \mathbb{N}_0$*, y es llamada estacionaria si,*

$$\pi_t^1 \left(\cdot|h_t\right) = \varphi^1 \left(\cdot|x_t\right), \quad \forall\, h_t \in H_t,\ t \in \mathbb{N}_0.$$

para algún kernel estocástico $\varphi^1 \in \Phi^1$*, así que* π^1 *es de la forma* $\pi^1 = \{\varphi^1, \varphi^1, \dots\} := \{\varphi^1\}$.

Análogamente se definen las estrategias para el jugador 2 y se denota por Π^2 *al conjunto de las estrategias del jugador 2.*

Notación 1. *Se utilizará la siguiente notación relacionada con las medidas de probabilidad en los conjuntos* $\mathbb{A}(x)$ *y* $\mathbb{B}(x)$*. Para medidas de probabilidad* $\varphi^1(\cdot|x) \in \mathbb{A}(x)$, $\varphi^2(\cdot|x) \in \mathbb{B}(x)$ *y* $x \in X$*, escribimos* $\varphi^i(x) = \varphi^i(\cdot|x), i = 1, 2$.
Abusando de la notación, también se denota por:

- Φ_1 *el conjunto de todas las estrategias estacionarias para el jugador 1;*
- Φ_2 *el conjunto de todas las estrategias estacionarias para el jugador 2;*
- $\Phi := \Phi_1 \times \Phi_2$*;* $\Pi := \Pi^1 \times \Pi^2$.
  Así, para cada $\pi \in \Pi$ *y* $\varphi \in \Phi$, $\pi := (\pi^1, \pi^2)$*;* $\varphi := (\varphi^1, \varphi^2)$.

Además, para cada función medible $u : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *y par de estrategias estacionaria* $\varphi \in \Phi$

$$u\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) := \int_{B(x)} \int_{A(x)} u(x,a,b)\varphi^1(da|x)\varphi^2(db|x) = u\left(x, \varphi^1(x), \varphi^2(x)\right), \quad \forall\, x \in X.$$

Por ejemplo,

$$Q\left(\cdot|x, \varphi^1, \varphi^2\right) := \int_{B(x)} \int_{A(x)} Q(\cdot|x,a,b)\varphi^1(da|x)\varphi^2(db|x), \quad \forall\, x \in X.$$

Además, para $x \in X$*,* $s \in S$ *y una función medible* $v : X \to \mathbb{R}$ *se escribe*

$$v[F(x, \varphi^1, \varphi^2, s)] := \int_{B(x)} \int_{A(x)} v(F(x,a,b,s))\varphi^1(da|x)\varphi^2(db|x).$$

1.3. Juegos de ecuaciones en diferencias

Se considera un juego de Markov de suma cero para dos personas en tiempo discreto cuyo proceso de estado $\{x_t\}$ evoluciona según la ecuación

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, b_t, \xi_t), \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{1.3}$$

donde $F : \mathbb{K} \times S \to X$ es una función medible dada y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{F}', P)$, tomando valores en un espacio de Borel S, con distribución común $G \in \mathbb{P}(S)$, e independiente del estado inicial x_0. En este caso la ley de transición Q en (1.2) es determinada por la función F y G como

$$\begin{aligned} Q(D|x, a, b) &= G(\{s \in S : F(x, a, b, s) \in D\}) \\ &= \int_S 1_D[F(x, a, b, s)]G(ds), \quad D \in \mathcal{B}(X), \end{aligned} \tag{1.4}$$

para $(x, a, b) \in \mathbb{K}$. Si G tiene una densidad θ en $S = \mathbb{R}^k$ con respecto a la medida de Lebesgue, entonces Q toma la siguiente forma

$$Q(D|x, a, b) = \int_{\mathbb{R}^k} 1_D[F(x, a, b, s)]\theta(s)(ds), \quad D \in \mathcal{B}(X).$$

Para el caso de juegos que evolucionan de acuerdo con una ecuación de diferencia como (1.3), se considera historias de la forma

$$h_t := (x_0, a_0, b_0, \xi_0, \ldots, x_{t-1}, a_{t-1}, b_{t-1}, \xi_{t-1}, x_t) \in \mathbb{K} \times S \times H_{t-1}. \tag{1.5}$$

1.4. Proceso de estados del juego de Markov

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio medible que consiste en el espacio muestral $\Omega := \mathbb{K}^\infty$ y su σ-álgebra producto $\mathcal{F}$. Para cada par de estrategias $\pi \in \Pi$ y estado inicial $x_0 = x \in X$, por el Teorema de C. Ionescu-Tulcea (véase Apéndice C.2) existe una única medida de probabilidad P_x^π definida en el espacio muestral $(\Omega, \mathcal{F})$ y un proceso estocástico $\{(x_t, a_t, b_t)\}$, donde x_t y (a_t, b_t) representan el estado y las acciones de los jugadores, respectivamente, en la etapa $t \in \mathbb{N}_0$, satisfaciendo; para $D \in \mathcal{B}(X)$, $A' \in \mathcal{B}(A)$ y $B' \in \mathcal{B}(B)$,

$$P_x^\pi(x_0 \in D) = \delta_x(D); \tag{1.6}$$

$$P_x^\pi\left(a_t \in A'|h_t\right) = \pi_t^1\left(A'|h_t\right); \tag{1.7}$$

$$P_x^\pi\left(b_t \in B'|h_t\right) = \pi_t^2\left(B'|h_t\right); \tag{1.8}$$

$$P_x^\pi\left(a_t \in A', b_t \in B'|h_t\right) = \pi_t^1\left(A'|h_t\right)\pi_t^2\left(B'|h_t\right); \tag{1.9}$$

$$P_x^\pi\left(x_{t+1} \in D|h_t, a_t, b_t\right) = Q\left(D|x_t, a_t, b_t\right); \tag{1.10}$$

donde $\delta_x(\cdot)$ es la medida de Dirac concentrada en x.

En el escenario de los juegos en ecuaciones en diferencias (1.3), el espacio medible consiste en el espacio muestral $\Omega = (\mathbb{K} \times S)^\infty$ con la correspondiente σ-álgebra producto $\mathcal{F}$. Entonces, considerando historias de la forma (1.5) además de las propiedades (1.6)-(1.10), tenemos que para cada $\pi \in \Pi$ y $x \in X$, la medida de probabilidad P_x^π y el proceso estocástico $\{(x_t, a_t, b_t, \xi_t)\}$, satisfacen

$$P_x^\pi\left(\xi_t \in S'|h_t, a_t, b_t\right) = G\left(S'\right), \quad S' \in \mathcal{B}(S). \tag{1.11}$$

El proceso estocástico $\{x_t\}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P_x^\pi)$ se llama proceso de estado del juego.

1.5. Índices de funcionamiento

Para cada par de estrategias $\pi \in \Pi$ y el estado inicial $x_0 = x \in X$, se define el pago total esperado α-descontado como

$$V_\alpha(x, \pi^1, \pi^2) := E_x^\pi\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(x_t, a_t, b_t)\right], \tag{1.12}$$

donde $\alpha \in (0,1)$ es el factor de descuento y E_x^π representa el operador esperanza respecto a la medida P_x^π.

También se define el pago promedio esperado como

$$J\left(x, \pi^1, \pi^2\right) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{t=0}^{n-1} r\left(x_t, a_t, b_t\right), \quad x \in X. \tag{1.13}$$

Los valores superior e inferior del juego descontado se definen como:

$$U_\alpha(x) := \inf_{\pi^2\in\Pi^2} \sup_{\pi^1\in\Pi^1} V_\alpha(x, \pi^1, \pi^2), \quad x \in X, \tag{1.14}$$

y

$$L_\alpha(x) := \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha(x, \pi^1, \pi^2), \quad x \in X, \tag{1.15}$$

respectivamente. Observe que en general, $U_\alpha(\cdot) \geq L_\alpha(\cdot)$, pero si se tiene que $U_\alpha(\cdot) = L_\alpha(\cdot)$ la función común se llama valor α-descontado del juego y se denota por $V_\alpha^*(\cdot)$. Ahora si el juego descontado tiene un valor $V_\alpha^*(\cdot)$, una estrategia $\pi_*^1 \in \Pi^1$ se dice ser α-óptima para el jugador 1 si,

$$V_\alpha^*(x) = \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi^2), \quad x \in X.$$

Similarmente, una estrategia $\pi_*^2 \in \Pi^2$ se dice ser α-óptima para el jugador 2 si,

$$V_\alpha^*(x) = \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha(x, \pi^1, \pi_*^2), \quad x \in X.$$

En este caso $\pi_* := (\pi_*^1, \pi_*^2)$ es un par de estrategias α-óptimo o punto silla. Note que π_* es un par de estrategias α-óptimo, sí y sólo sí,

$$V_\alpha(x, \pi^1, \pi_*^2) \leq V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi_*^2) = V_\alpha^*(x) \leq V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi^2); \quad \forall\, x \in X, \pi \in \Pi. \tag{1.16}$$

El valor inferior $L(\cdot)$ y superior $U(\cdot)$ para el criterio de pago promedio se definen de manera similar, y el valor promedio del juego se denota por $J_*(\cdot)$. Entonces, si el juego promedio tiene un valor $J_*(\cdot)$, una estrategia $\pi_*^1 \in \Pi^1$ se dice ser óptima promedio para el jugador 1 si,

$$J_*(x) = \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} J\left(x, \pi_*^1, \pi^2\right); \quad x \in X, \tag{1.17}$$

y una estrategia $\pi_*^2 \in \Pi^2$ se dice ser óptima promedio para el jugador 2 si,

$$J_*(x) = \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} J\left(x, \pi^1, \pi_*^2\right), \quad x \in X. \tag{1.18}$$

El par π_* es llamado un par óptimo promedio de estrategias si (1.17) y (1.18) se tienen; equivalentemente,

$$J\left(x, \pi^1, \pi_*^2\right) \leq J\left(x, \pi_*^1, \pi_*^2\right) = J_*(x) \leq J\left(x, \pi_*^1, \pi^2\right); \quad \forall\, x \in X, \pi \in \Pi. \tag{1.19}$$

1.6. Espacios de norma ponderada

Introducimos el siguiente espacio, el cual es conocido como el espacio de las funciones W-acotadas.

Sea $W : X \to [1, \infty)$ una función medible, la cual se denomina función de peso o de ponderación. Se define, para cada función medible $u : X \to \mathbb{R}$, la norma ponderada W o W-norma, como

$$\|u\|_W := \sup_{x \in X} \frac{|u(x)|}{W(x)}.$$

Se denota por $\mathbb{B}_W$ al espacio de todas las funciones medibles W-acotadas en X, es decir, que tienen W-norma finita. El espacio $\mathbb{B}_W$ con la norma $\|\cdot\|_W$ forman un espacio lineal normado, que además es un espacio de Banach [12].

Observe que, una función u medible en X pertenece a $\mathbb{B}_W$, si existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq \kappa W(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Capítulo 2

Criterios de optimalidad descontado y promedio

Se considera el modelo de juego

$$\mathcal{GM} := (X, A, B, \mathbb{K}_A, \mathbb{K}_B, Q, r),$$

definido en (1.1). El problema que nos ocupa en este capítulo es dar las condiciones necesarias para garantizar la existencia de los valores del juego y de las parejas de estrategias óptimas. Es decir, demostrar la existencia de la función V_α^* para el caso descontado y el par de estrategias $\pi_* := (\pi_*^1, \pi_*^2) \in \Pi$ tales que, para cada $x \in X$ y $\pi \in \Pi$, $U_\alpha(x) = L_\alpha(x) = V_\alpha^*(x)$ y

$$V_\alpha(x, \pi^1, \pi_*^2) \leq V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi_*^2) = V_\alpha^*(x) \leq V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi^2).$$

Y la existencia de la función J_* para el caso promedio, y el par de estrategias $\pi_* \in \Pi$ tales que, para cada $x \in X$ y $\pi \in \Pi$, $U(x) = L(x) = J_*(x)$ y

$$J(x, \pi^1, \pi_*^2) \leq J(x, \pi_*^1, \pi_*^2) = J_*(x) \leq J(x, \pi_*^1, \pi^2).$$

2.1. Criterio de optimalidad descontado

En esta sección se trata con el siguiente operador conocido como el operador de Shapley para el caso descontado, definido en una familia de funciones medibles $v \in X$:

$$T_\alpha v(x) = \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \left[r(x, \varphi^1, \varphi^2) + \alpha \int_X v(y) Q\left(dy | x, \varphi^1, \varphi^2\right) \right], \quad x \in X. \tag{2.1}$$

El objetivo principal en (2.1) es garantizar el intercambio entre el ínf y sup, así como la existencia del par óptimo. Con este fin, es necesario imponer condiciones adecuadas de continuidad y compacidad en el modelo de juego, como las siguientes:

Hipótesis 2.1. *Para cada $(x, a, b) \in \mathbb{K}$ y cada $\alpha \in (0,1)$, existe una función continua $W : X \to [1, \infty)$ y una constante $\beta > 0$ con $\alpha\beta \in (0,1)$, tales que,*

a) $0 \leq r(x, a, b) \leq W(x)$;

b) $\int_X W(y) Q\left(dy | x, a, b\right) \leq \beta W(x)$.

Observación 2.1. *En el contexto de juegos en ecuaciones en diferencias, de (1.4) tenemos que el inciso (b) de la Hipótesis anterior se puede escribir como:*

$$\int_S W\left[F\left(x, a, b, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \leq \beta W(x), \quad (x, a, b) \in \mathbb{K}.$$

Hipótesis 2.2. *a) Los conjuntos $A(x)$ y $B(x)$ son compactos, para cada $x \in X$.*

b) La función de pago $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{K}$.

c) La función $(x, a, b) \to \int_X u(y) Q(dy|x, a, b)$ es una función continua en $\mathbb{K}$ para cada $u \in C(X)$.

d) La función

$$(x, a, b) \to \int W(y) Q(dy|x, a, b),$$

es continua en $\mathbb{K}$.

Observación 2.2. *a) Supondremos que la función W es una función de peso en el sentido de la Sección 1.6. Entonces se considera el espacio de Banach $\mathbb{B}_W$ de funciones con W-norma finita.*

b) *Note que la Hipótesis 2.1(a) permite asumir que la función de pago r es posiblemente no acotada. En el caso en que r sea acotada, sin pérdida de generalidad se asume que $W \equiv 1$, y por lo tanto, las Hipótesis 2.1(a) y 2.2(e) se cumplen.*

Lema 2.1.1. *Sea $\pi \in \Pi$ un par de estrategias arbitraria y $x \in X$ un estado inicial arbitrario. La Hipótesis 2.1 implica los siguientes hechos, para cada $t \in \mathbb{N}_0$,*

a) $E_x^\pi W(x_t) \leq \beta^t W(x)$;

b) $|E_x^\pi r(x_t, a_t, b_t)| \leq \beta^t W(x)$;

c) $\lim_{t\to\infty} \alpha^t E_x^\pi u(x_t) = 0$ *para todo* $u \in \mathbb{B}_W$.

Demostración. a) De (1.10) y la Hipótesis 2.1(b), para cada $t \in \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi$, $x \in X$

$$\begin{aligned} E_x^\pi \left[W(x_t) | h_{t-1}, a_{t-1}, b_{t-1}\right] &= \int_X W(y) Q(dy | x_{t-1}, a_{t-1}, b_{t-1}) \\ &\leq \beta W(x_{t-1}). \end{aligned}$$

Entonces, aplicando E_x^π a esta desigualdad, se obtiene

$$E_x^\pi W(x_t) \leq \beta E_x^\pi \left(W(x_{t-1})\right),$$

cuya iteración implica que

$$E_x^\pi W(x_t) \leq \beta^t W(x),$$

es decir, se cumple la desigualdad (a).
b) De la Hipótesis 2.1(a), para $t \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$|r(x_t, a_t, b_t)| \leq W(x_t) \Longrightarrow |E_x^\pi r(x_t, a_t, b_t)| \leq E_x^\pi W(x_t).$$

De esta última desigualdad y del inciso anterior, se obtiene (b).
c) Sea $u \in \mathbb{B}_W$, entonces existe una constante $\kappa > 0$, tal que

$$|u(x_t)| \leq \kappa W(x_t) \Longrightarrow |E_x^\pi u(x_t)| \leq \kappa E_x^\pi W(x_t).$$

Aplicando el inciso a) en la desigualdad anterior, como $\alpha\beta \in (0, 1)$, se sigue que,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha^t |E_x^\pi u(x_t)| \leq \lim_{t\to\infty} \kappa (\alpha\beta)^t W(x) = 0.$$

Con esto se concluye en inciso c). ■

Observación 2.3. *La Hipótesis 2.2(d) implica que para cada* $u \in L(X)$ *la función* $(x,a,b) \to \int_X u(y)Q(dy|x,a,b)$ *es l.s.c. para cada* $(x,a,b) \in \mathbb{K}$, *(véase, e.g., [21, 22]). Además resultados usuales sobre juegos de suma cero implican que se puede intercambiar el supremo e ínfimo en (2.1). Específicamente, combinando el Teorema de Berge, Teorema de selección medible, y el Teorema minimax de Fan, (véase Apéndice A y también [12, 21, 22, 25]), bajo la Hipótesis 2.2 se tiene que existe* $\varphi_* := (\varphi_*^1, \varphi_*^2) \in \Phi$ *tal que, para todo* $x \in X$, $\varphi_*^1(x) \in \mathbb{A}(x)$ *y* $\varphi_*^2(x) \in \mathbb{B}(x)$ *satisfacen*

$$\begin{aligned} T_\alpha v(x) &= \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_X v(y) Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi^2\right) \right] \\ &= r\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_X v(y) Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) \\ &= \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} r\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_X v(y) Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) \\ &= \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} r\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_X v(y) Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Antes de mencionar el teorema principal para la solución del problema en el caso descontado, se presentará el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Bajo las Hipótesis 2.1 y 2.2, para cada* $\varphi \in \Phi$ *y* $u \in \mathbb{B}_W$ *arbitrarios, el operador,* $T_\varphi : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$, *definido por*

$$T_\varphi u\,(x) := r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_X u(y) Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi^2\right),\ x \in X, u \in \mathbb{B}_W, \tag{2.3}$$

es un operador de contracción en $\mathbb{B}_W$ *con modulo* $\alpha\beta$ *y además su punto fijo está dado por* V_φ, *donde* $V_\varphi(x) := V_\alpha\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right)$. *Es decir, para* $u, v \in \mathbb{B}_W$:

$$\|T_\varphi u - T_\varphi v\|_W \leq \alpha\beta \|u - v\|_W$$

y

$$T_\varphi V_\varphi(x) = V_\varphi(x).$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathbb{B}_W$ arbitrarios. Entonces,

$$\begin{aligned} |T_\varphi u - T_\varphi v| &= \left|\alpha \int_X u(y) Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \alpha \int_X v(y) Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)\right| \\ &= \alpha \left|\int_X \left(u(y) - v(y)\right) Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)\right| \\ &\leq \alpha \int_X |u(y) - v(y)|\, Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right) \\ &\leq \alpha \|u - v\|_W \int_X W(y) Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Entonces de la desigualdad anterior y de la Hipótesis 2.1(b), resulta que:

$$\begin{aligned} |T_\varphi u - T_\varphi v| &\leq \alpha\beta \|u - v\|_W W(x), \\ \Longrightarrow \frac{|T_\varphi u - T_\varphi v|}{W(x)} &\leq \alpha\beta \|u - v\|_W, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\|T_\varphi u - T_\varphi v\|_W \leq \alpha\beta \|u - v\|_W.$$

Así, T_φ es operador de contracción en $\mathbb{B}_W$ con modulo $\alpha\beta$.
Solo falta ver que V_φ es el único punto fijo de T_φ. Dado que, T_φ es de contracción en $\mathbb{B}_W$, existe un único punto fijo $u \in \mathbb{B}_W$, es decir,

$$T_\varphi u = u.$$

Por (2.3) se tiene,

$$u(x) = r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) + \alpha \int_X u(y) Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right).$$

Iterando esta desigualdad se obtiene

$$u(x) = T_\varphi^n u(x) = E_x^\varphi \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r\left(x_t,\varphi^1,\varphi^2\right)\right] + \alpha^n E_x^\varphi u\left(x_n\right),$$

para todo $x \in X$ y $n \geq 1$, donde $E_x^\varphi u\left(x_n\right) = \displaystyle\int_X u(y) Q^n\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)$, y $Q^n\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)$ es el kernel de transición en n pasos del proceso de Markov $\{x_t\}$ cuando se usa φ^1 y φ^2. Finalmente, tomando el límite cuando $n \to \infty$, del Lema 2.1.1(c), se sigue que $u(x) = V_\varphi(x)$, para todo $x \in X$. Por lo tanto V_φ es el único punto fijo de T_φ ∎

Observación 2.4. *Similarmente como en la Proposición 2.1 se demuestra que el operador*

$T_\alpha : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$ definido en (2.1) es de contracción modulo $\alpha\beta \in (0,1)$. Este hecho combinado con (2.2) muestra que el único punto fijo de T_α es $V_\alpha^* \in \mathbb{B}_W$, es decir,

$$T_\alpha V_\alpha^* = V_\alpha^*,$$

y las estrategias $\varphi_*^1 \in \Phi^1$ y $\varphi_*^2 \in \Phi^2$ definen un par óptimo de estrategias estacionarias. Específicamente se tiene el siguiente resultado, (véase, e.g., [21, 22, 25]):

Teorema 2.1. *Supongamos que las Hipótesis 2.1 y 2.2 se satisfacen. Entonces para cada $\alpha \in (0,1)$, el valor V_α^* satisface*

$$T_\alpha V_\alpha^* = V_\alpha^*, \tag{2.4}$$

y existe $\varphi_* \in \Phi$, tal que $\varphi_*^1 \in \mathbb{A}(x)$ y $\varphi_*^2 \in \mathbb{B}(x)$, satisfacen,

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(x) &= r\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_X V_\alpha^*(y) Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) \\ &= \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_X V_\alpha^*(y) Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) \right] \\ &= \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \left[r\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_X V_\alpha^*(y) Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) \right], \ x \in X. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Además, $\pi_*^1 = \{\varphi_*^1\} \in \Phi^1$ y $\pi_*^2 = \{\varphi_*^2\} \in \Phi^2$ forman un par de estrategias óptimo.

Observación 2.5. *Para juegos en ecuaciones en diferencias como (1.3), se tiene que existe $\varphi^* \in \Phi$ tal que*

$$\begin{aligned} T_\alpha V_\alpha^* = V_\alpha^*(x) &= r\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \\ &= \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) + \alpha \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right] \\ &= \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \left[r\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right], \ x \in X. \end{aligned}$$

2.2. Criterio de optimalidad promedio

Ahora en esta sección se interesa analizar el juego de pago promedio, es decir, el juego en (1.3) con el pago promedio esperado (1.13). Al contrario del criterio descontado (1.12), el índice de desempeño promedio depende de la cola del proceso de estado del juego en lugar de las primeras etapas del juego. Debido a lo anterior, es necesario imponer condiciones adecuadas de ergodicidad al modelo de juego, ya que es necesario un análisis asintótico para su estudio.

Hipótesis 2.3. *a) Los conjuntos $A(x)$ y $B(x)$ son compactos, para cada $x \in X$.*

b) La función de pago $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{K}$.

c) La función $(x, a, b) \to \int_X u(y)Q(dy|x, a, b)$ es una función continua en $\mathbb{K}$ para cada $u \in C(X)$.

d) Existe una función continua $W : X \to [1, \infty)$ en X tal que, $0 \leq r(x, a, b) \leq W(x)$, $\forall\ (x, a, b) \in \mathbb{K}$;

e) La función

$$(x, a, b) \to \int W(y)Q(dy|x, a, b)$$

es continua en $\mathbb{K}$.

Hipótesis 2.4. *Existe un número $\lambda \in [0, 1)$, una medida de probabilidad ν en X y una función continua $\phi : \mathbb{K} \to [0, \infty)$, tal que, para cada $(x, a, b) \in \mathbb{K}$ lo siguiente se tiene:*

a) $Q\,(B|x, a, b) \geq \phi\,(x, a, b)\,\nu(B)$, $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$.

b) $\int_X W(y)Q\,(dy|x, a, b) \leq \lambda W(x) + \phi\,(x, a, b) \int_X W d\nu$.

c) $d := \sup_{(x,a,b)\in\mathbb{K}} \phi\,(x, a, b) \int_X W d\nu < \infty$.

d) $\int_X \phi\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right)\, d\nu > 0$.

Observación 2.6. *Para juegos en ecuaciones en diferencias, se tiene que de (1.4) la Hipótesis 2.4(b) toma la forma*

$$\begin{aligned}\int_S W\left[F\,(x, a, b, \xi)\right] G\,(d\xi) &\leq \lambda W(x) + \phi\,(x, a, b) \int_X W\, d\nu \\ &\leq \lambda W(x) + d.\end{aligned}$$

Lema 2.2.1. *Sea $\pi \in \Pi$ un par de estrategias arbitraria y $x \in X$ un estado inicial arbitrario. La Hipótesis 2.4 implica los siguientes hechos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$;*

a) $E_x^\pi W\,(x_n) \leq \lambda^n W\,(x) + \dfrac{d}{1-\lambda}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} E_x^\pi u\,(x_n) = 0, \quad \forall\, u \in \mathbb{B}_W$.

Demostración. a) De la Hipótesis 2.4(b) y (c), (ver Observación 2.6) y (1.10), para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} E_x^\pi \left[W\left(x_n\right) | h_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1} \right] &= \int_X W(y) Q\left(dy | x_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1}\right) \\ &\leq \lambda W\left(x_{n-1}\right) + \phi\left(x_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1}\right) \int_X W d\nu \\ &\leq \lambda W\left(x_{n-1}\right) + d. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E_x^\pi \left[W\left(x_n\right) \right] \leq \lambda E_x^\pi \left[W\left(x_{n-1}\right) \right] + d, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

lo cual implica

$$E_x^\pi W\left(x_n\right) \leq \lambda^n W\left(x\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d = \lambda^n W\left(x\right) + \frac{d}{1-\lambda}.$$

b) Dado que $u \in \mathbb{B}_W$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, existe κ tal que,

$$\left| u\left(x_n\right) \right| \leq \kappa W\left(x_n\right),$$

y

$$E_x^\pi \left| u\left(x_n\right) \right| \leq \kappa E_x^\pi W\left(x_n\right).$$

Del inciso anterior, se sigue que,

$$E_x^\pi \left| u\left(x_n\right) \right| \leq \kappa \left[\lambda^n W\left(x\right) + \frac{d}{1-\lambda} \right].$$

Dividiendo entre n y tomando límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \left| u\left(x_n\right) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \kappa \left[\lambda^n W\left(x\right) + \frac{d}{1-\lambda} \right] = 0.$$

∎

El problema de la existencia del valor del juego J_* y el par de estrategias $\pi_* \in \Pi$ en el criterio promedio, se puede estudiar y resolver de varias maneras. En nuestro caso se centrará en las siguientes dos:

- Enfoque del factor de descuento desvaneciente (Vanishing discount factor) el cual consiste en estudiar el caso promedio como límite del caso descontado cuando $\alpha \to 1$.

- La otra es, procediendo igual que el caso descontado, definir un operador de contracción en el espacio $\mathbb{B}_W$ y usar argumentos del punto fijo.

La idea en ambos casos es estudiar la ecuación de Shapley correspondiente. En este caso decimos que un par (h^*, j^*) formado por una función $h^* : X \to \mathbb{R}$ y una constante $\mathrm{j}^* \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Shapley para el caso promedio si:

$$h^*(x) = \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \mathrm{j}^* + \int_{\mathbf{X}} h^*(y) Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi^2\right) \right]. \tag{2.6}$$

2.2.1. Factor de descuento desvaneciente

Con el objetivo de aplicar los resultados del caso descontado, debemos verificar que se cumplen las Hipótesis 2.1 y 2.2. Entonces se asume que las Hipótesis 2.3 y 2.4 se satisfacen, la única condición que nos faltaría verificar es la Hipótesis 2.1(b), para lo cual se procede de la siguiente manera.
Para cada factor de descuento $\alpha \in (0,1)$, se fija un número $\gamma_\alpha \in (\alpha, 1)$ y se define la función $\overline{W}_\alpha(x) := W(x) + e$, $x \in X$, donde $e := d\left(\frac{\gamma_\alpha}{\alpha} - 1\right)^{-1}$. Ahora se considera el espacio $\mathbb{B}_{\overline{W}_\alpha}$ de funciones medibles $v : X \to \mathbb{R}$ con

$$\|v\|_{\overline{W}_\alpha} := \sup_{x \in X} \frac{|v(x)|}{\overline{W}_\alpha} < \infty. \tag{2.7}$$

Se puede mostrar [21, 22] que, para $v \in \mathbb{B}_W$

$$\|v\|_{\overline{W}_\alpha} \leq \|v\|_W \leq \ell_\alpha \|v\|_{\overline{W}_\alpha},$$

donde

$$\ell_\alpha := 1 + e = 1 + \frac{\alpha d}{\gamma_\alpha - \alpha}.$$

De aquí, $\|\cdot\|_W$ y $\|\cdot\|_{\overline{W}_\alpha}$ son equivalentes y por lo tanto $\mathbb{B}_W = \mathbb{B}_{\overline{W}_\alpha}$. Entonces de [30] Lema 1, la función $\overline{W}_\alpha$ satisface la desigualdad

$$\alpha \int_X \overline{W}_\alpha(y) Q\left(dy|x, a, b\right) \leq \gamma_\alpha \overline{W}_\alpha(x), \quad \forall\, (x, a, b) \in \mathbb{K}, \tag{2.8}$$

o en el contexto de juegos en ecuaciones de diferencias

$$\alpha \int_S \overline{W}_\alpha(y)\left[F\left(x,a,b,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right) \leq \gamma_\alpha \overline{W}_\alpha(x), \quad \forall\left(x,a,b\right)\in\mathbb{K}. \tag{2.9}$$

Por lo tanto, ambas relaciones (2.8) y (2.9) son equivalentes a la Hipótesis 2.1(b) (ver Observación 2.1) con $\alpha\beta = \gamma_\alpha$. Por lo tanto se tiene que el operador T_α es de contracción con módulo γ_α, i.e, para todo $u, v \in \mathbb{B}_W$,

$$\|T_\alpha u - T_\alpha v\|_{\overline{W}_\alpha} \leq \gamma_\alpha \|v-u\|_{\overline{W}_\alpha} = \alpha\beta\|u-v\|_{\overline{W}_\alpha}, \tag{2.10}$$

y el único punto fijo es el valor del juego V_α^*. En otras palabras, el Teorema 2.1 (ver Observación 2.5) se cumplen.

Sea V_α^* y $\varphi_* \in \Phi$ el valor del juego descontado y el par de estrategias óptima descontada. Sea $z \in X$ un estado arbitrario fijo, se define:

$$h_\alpha(x) := V_\alpha^*(x) - V_\alpha^*(z) \quad \text{y} \quad \mathrm{j}_\alpha := (1-\alpha)V_\alpha^*(z),$$

para cada $\alpha \in (0,1)$. Entonces la ecuación (2.4) es equivalente a

$$\mathrm{j}_\alpha + h_\alpha(x) = T_\alpha h_\alpha, \quad x \in X. \tag{2.11}$$

Además, de (2.5),

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_\alpha + h_\alpha(x) &= r\left(x,\varphi_*^1,\varphi_*^2\right) + \alpha\int_X h_\alpha(y)Q\left(dy|x,\varphi_*^1,\varphi_*^2\right) \\
&= \sup_{\varphi^1\in\mathbb{A}(x)}\left[r\left(x,\varphi^1,\varphi_*^2\right) + \alpha\int_X h_\alpha(y)Q\left(dy|\varphi^1,\varphi_*^2\right)\right] \\
&= \inf_{\varphi^2\in\mathbb{B}(x)}\left[r\left(x,\varphi_*^1,\varphi^2\right) + \alpha\int_X h_\alpha(y)Q\left(dy|\varphi_*^1,\varphi^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

El siguiente teorema, tomado de [21] (véase también [16] y [23]), el cual garantiza la existencia de un valor para el juego promedio, este valor queda definido como el límite de j_α cuando $\alpha \uparrow 1$.

Teorema 2.2. *Supongamos que las Hipótesis 2.3 y 2.4 se cumplen. Entonces el juego promedio tiene un valor constante $J_* = \mathrm{j}^*$, es decir,*

$$\mathrm{j}^* = \inf_{\pi^2\in\Pi^2}\sup_{\pi^1\in\Pi^1} J\left(x,\pi^1,\pi^2\right) = \sup_{\pi^1\in\Pi^1}\inf_{\pi^2\in\Pi^2} J\left(x,\pi^1,\pi^2\right), \quad x \in X.$$

Además, existen un par de estrategias óptima promedio $\pi_* \in \Phi$ *y*

$$\mathrm{j}^* = \lim_{\alpha \to 1^-} (1-\alpha) V_\alpha(z), \tag{2.13}$$

donde $z \in X$ *es un estado arbitrario pero fijo.*

Observación 2.7. *La demostración del teorema anterior está basada en el análisis del límite cuando* $n \to \infty$*, de la ecuación de Shapley para el caso descontado*

$$\mathrm{j}_{\alpha_n} + h_{\alpha_n}(x) = T_{\alpha_n} h_{\alpha_n}, \quad x \in X,$$

para una sucesión fija y arbitraria $\{\alpha_n\}$ *de factores de descuento que convergen a 1 [8, 16]. De hecho, a partir de (2.13) se tiene*

$$\mathrm{j}^* = \lim_{n \to \infty} \mathrm{j}_{\alpha_n}.$$

Mas aún, (h^*, j^*) *es una solución de (2.6), donde*

$$h^*(x) = \liminf_{n \to \infty} h_{\alpha_n}(x).$$

Además también se demuestra la existencia de una constante $\overline{K}$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\left| V^*_{\alpha_n}(x) - V^*_{\alpha_n}(z) \right| \leq \overline{K} W(x).$$

Observación 2.8. *La ecuación (2.12) en términos de la dinámica (1.3), toma la forma:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_\alpha + h_\alpha(x) &= r\left(x, \varphi^1_*, \varphi^2_*\right) + \alpha \int_S h_\alpha\left[F\left(x, \varphi^1_*, \varphi^2_*, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \\
&= \sup_{\varphi^1 \in \mathbb{A}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1, \varphi^2_*\right) + \alpha \int_S h_\alpha\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2_*, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right] \\
&= \inf_{\varphi^2 \in \mathbb{B}(x)} \left[r\left(x, \varphi^1_*, \varphi^2\right) + \alpha \int_S h_\alpha\left[F\left(x, \varphi^1_*, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right].
\end{aligned}$$

2.2.2. Método del punto fijo

En esta sección se sigue el enfoque de Vega-Amaya [31], basado en argumentos del punto fijo para obtener soluciones a la ecuación de Poisson (2.18) y a la Ecuación de Shapley (2.19) para el caso promedio. La idea principal en este enfoque es, a partir de la Hipótesis 2.4 construir un nuevo kernel, con el cual se obtienen propiedades de punto fijo. En efecto, se define el siguiente kernel,

$$\widehat{Q}\left(\cdot|x,a,b\right) := Q\left(\cdot|x,a,b\right) - \phi\left(x,a,b\right)\nu(\cdot) \quad \forall\left(x,a,b\right) \in \mathbb{K}. \tag{2.14}$$

Por la Hipótesis 2.4(a), el kernel $\widehat{Q}$ es no negativo, además, la Hipótesis 2.4(b) puede ser expresada equivalentemente como:

$$\int_X W(y)\widehat{Q}\left(y|x,a,b\right) \leq \lambda W(x). \tag{2.15}$$

Esta desigualdad es la clave para demostrar los resultados principales.

Para cada $\varphi \in \Phi$ y $u \in \mathbb{B}_W$ se define el operador $T : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$, como

$$Tu\left(x\right) := r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - J_* + \int_X u(y)Q\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \phi\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)\int_X u\,d\nu, \quad x \in X. \tag{2.16}$$

Observe que por (2.14), se tiene

$$Tu\left(x\right) := r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - J_* + \int_X u(y)\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right), \quad x \in X. \tag{2.17}$$

En términos de la dinámica (1.4), el operador (2.16) es equivalente a

$$Tu\left(x\right) := r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - J_* + \int_S u\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right) - \phi\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)\int_X u\,d\nu.$$

Proposición 2.2. *Bajo las Hipótesis 2.3 y 2.4, el operador $T : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$ es de contracción con módulo λ, es decir, para $u,v \in \mathbb{B}_W$,*

$$\|Tu - Tv\|_W \leq \lambda\|u-v\|_W.$$

Demostración. Para $u,v \in \mathbb{B}_W$ arbitrarios, se tiene que

$$\begin{aligned}
|Tu - Tv| &= \left|\int_X u(y)\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \int_X v(y)\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)\right| \\
&= \left|\int_X \left(u(y)-v(y)\right)\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right)\right| \\
&\leq \int_X |u(y)-v(y)|\,\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right) \\
&\leq \|u-v\|_W \int_X W(y)\widehat{Q}\left(dy|x,\varphi^1,\varphi^2\right).
\end{aligned}$$

Entonces de la desigualdad anterior y de (2.15), resulta que:

$$|Tu - Tv| \leq \lambda \|u - v\|_W W(x),$$

lo cual implica

$$\frac{|Tu - Tv|}{W(x)} \quad \leq \quad \lambda \|u - v\|_W.$$

Por lo tanto,

$$\|Tu - Tv\|_W \leq \lambda \|u - v\|_W.$$

Así, T es operador de contracción en $\mathbb{B}_W$ con módulo λ. ∎

Observación 2.9. *Dado que, T es de contracción en $\mathbb{B}_W$, existe un único punto fijo $h \in \mathbb{B}_W$, es decir, $Th = h$.*

Ahora se presenta los siguientes resultados tomado de [31]. El primero garantiza la existencia de la solución de la ecuación de Poisson y de la medida invariante; su demostración se sigue de la Proposición 2.2 y de [31]. Y el segundo resultado garantiza la existencia del valor del juego y estrategias óptimas del juego promedio.

Teorema 2.3. *Supongamos que las Hipótesis 2.3 y 2.4 se tienen. Entonces, para cada par de estrategias estacionaria $\varphi \in \Phi$ se tiene lo siguiente:*

a) Existe una única función $h \in \mathbb{B}_W$, con $\nu\left(h\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right)\right) := \int_X h\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) d\nu = 0$ (ver 1), que satisface la ecuación de Poisson, es decir,

$$h\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) = r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \mathrm{j}\left(\varphi^1, \varphi^2\right) + \int_X h\left(y, \varphi^1, \varphi^2\right) Q\left(dy | x, \varphi^1, \varphi^2\right) \quad \forall x \in X. \tag{2.18}$$

donde $\mathrm{j}\left(\varphi^1, \varphi^2\right) = \mu\left(r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right)\right)$ y μ es una medida invariante.

b) Además, $J\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) = \mathrm{j}\left(\varphi^1, \varphi^2\right)$.

Teorema 2.4. *Supongamos que las Hipótesis 2.3 y 2.4 se satisfacen, entonces se cumple lo siguiente:*

a) *Existe una única función* $h^* \in \mathbb{B}_W$ *con* $\nu(h^*) := \int_X h^* d\nu = 0$, *un par de estrategias* $\varphi_* \in \Phi$, *y una constante* j^* *la cual satisface la ecuación de Shapley*

$$\begin{aligned} h^*(x) &= \min_{\varphi^2 \in \Phi^2} \left\{ r\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) - \mathrm{j}^* + \int_X h^*(y)\, Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) \right\} \\ &= \max_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) - \mathrm{j}^* + \int_X h^*(y)\, Q\left(dy|x, \varphi^1, \varphi_*^2\right) \right\} \\ &= r\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) - \mathrm{j}^* + \int_X h^*(y)\, Q\left(dy|x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

b) *La constante* j^* *es el valor del juego y* φ_* *es el par de estrategias óptima promedio. Es decir,* $J_*(x) = \mathrm{j}^*$ *y*

$$J\left(x, \pi^1, \varphi_*^2\right) \leq \mathrm{j}^* \leq J\left(x, \varphi_*^1, \pi^2\right), \quad \forall \pi \in \Pi.$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.3,

$$h^*(x) = h\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right).$$

c) *Además,*

$$\mathrm{j}^* = \mathrm{j}\left(\varphi_*^1, \varphi_*^2\right) = \max_{\varphi^1 \in \Phi^1} \min_{\varphi^2 \in \Phi^2} \mathrm{j}\left(\varphi^1, \varphi^2\right) = \min_{\varphi^2 \in \Phi^2} \max_{\varphi^1 \in \Phi^1} \mathrm{j}\left(\varphi^1, \varphi^2\right) \tag{2.20}$$

y

$$h^*(x) = h\left(x, \varphi_*^1, \varphi_*^2\right) = \min_{\varphi^2 \in \Phi^2} h\left(x, \varphi_*^1, \varphi^2\right) = \max_{\varphi^1 \in \Phi^1} h\left(x, \varphi^1, \varphi_*^2\right). \tag{2.21}$$

Capítulo 3

Estabilidad Caso Descontado

3.1. Introducción

Se considera dos modelos de juegos de Markov de suma cero a tiempo discreto $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ definidos en el mismo espacio de estados X y acciones A, B; con funciones de distribución G y $\widetilde{G}$, respectivamente, donde $\widetilde{G}$ es la aproximación a la función de distribución G, la cual se supone desconocida o difícil de tratar.

También se supone, que bajo las hipótesis adecuadas (Sección 2.1), existen los pares óptimos π_* y $\widetilde{\pi}_*$ para $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ respectivamente. Nuestro problema consiste en dar estimaciones del pago en $\mathcal{GM}$ al usar $\widetilde{\pi}_*$ como estrategia de control de nuestro modelo en lugar de la óptima. En este capítulo se usará como criterio de optimalidad el pago total esperado α-descontado.

Se presentarán desigualdades para estimar la estabilidad de un problema de juego, donde la perturbación del modelo queda determinada por las probabilidades de transición; el nivel de tal estimación es medido por el índice de estabilidad, en nuestro caso se definirán dos índices de estabilidad (3.4), (3.5).

El problema de la estimación de la estabilidad, para el caso descontado, es buscar desigualdades del tipo:

$$\left\{\Delta^1(x), \Delta^2(x)\right\} \leq C(x)\,\psi\left[\mu\left(G, \widetilde{G}\right)\right], \quad x \in X, \tag{3.1}$$

donde $\psi(y) \to 0$ cuando $y \to 0$, y μ es una métrica en el espacio de medidas de probabilidad (véase Apéndice D).
El objetivo es presentar un conjunto de condiciones sobre los modelos $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ que permita probar (3.1) para $\psi(y) = y$ y cierta métrica de probabilidad μ.

3.1.1. El modelo perturbado

Se considera el modelo de juego $\mathcal{GM}$ definido en (1.1) cuya dinámica está dada por (1.3) con función de distribución G desconocida por lo jugadores (véase (1.4)). A pesar de que los jugadores están buscando el par óptimo π_*, al desconocer la función de distribución G se ven obligados a trabajar con el siguiente modelo de juego aproximado:
Sea $\widetilde{\mathcal{GM}}$ el modelo de juego aproximado de (1.1) donde el proceso de estados evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\tilde{x}_{t+1} = F(\tilde{x}_t, a_t, b_t, \widetilde{\xi}_t), \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

donde $\tilde{x}_t \in X$, y $\widetilde{\xi}_t \in S$ son variables aleatorias i.i.d. Sean ξ y $\widetilde{\xi}$ las variables aleatorias genéricas para $\{\xi_t\}$ y $\{\widetilde{\xi}_t\}$, respectivamente, y sea $\widetilde{G}$ la distribución común de $\widetilde{\xi}$, la cual se asumirá que es conocida por los jugadores.
De igual manera como se definió en (1.12), se define el pago total esperado α-descontado para (3.2) como:

$$\widetilde{V}_\alpha\left(x, \pi^1, \pi^2\right) := \widetilde{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(\tilde{x}_t, a_t, b_t)\right]. \tag{3.3}$$

Observación 3.1. *De aquí en adelante se asume que los modelos $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ satisfacen las Hipótesis 2.1 y 2.2. Por lo tanto, el Teorema 2.1 garantiza la existencia de los valores del juego V_α^* y $\widetilde{V}_\alpha^*$ para el modelo original y el modelo aproximado, respectivamente, además también existen las estrategias óptimas π_*^1, $\widetilde{\pi}_*^1$ y π_*^2, $\widetilde{\pi}_*^2$, para los jugadores 1 y 2.*

3.2. Índice de Estabilidad

Dado que la distribución que se conoce es la distribución del proceso aproximado $\widetilde{G}$, el par óptimo $\widetilde{\pi}_* := (\widetilde{\pi}_*^1, \widetilde{\pi}_*^2)$ puede ser encontrado. Entonces los jugadores controlan el proceso $\{x_t\}$, dado por (1.3), a través de la aplicación de las estrategias $\widetilde{\pi}_*$. De esta manera, $\widetilde{\pi}_*$ es usado como una aproximación razonable para la estrategia no disponible π_*.

Se medirá la precisión de dicha aproximación en términos de lo que se conoce como índice de estabilidad. La definición empleada para el índice de estabilidad en el caso de un juego de suma cero, esta determinada por dos índices, es decir, definir un índice para cada jugador, esta definición se presenta a continuación.

Definición 3.2.1. *Sea $\widetilde{\pi}_*$ el par óptimo para el juego (3.2) y V_α^* la función de valor para el juego (1.3). Se define:*

a) El índice de estabilidad para el jugador 1*,*

$$\Delta^1(x) := \left| \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) - V_\alpha^*(x) \right|, \quad x \in X. \tag{3.4}$$

b) El índice de estabilidad para el jugador 2*,*

$$\Delta^2(x) := \left| \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - V_\alpha^*(x) \right|, \quad x \in X. \tag{3.5}$$

La motivación general de considerar esta definición del índice de estabilidad, es la siguiente:
Sea μ una métrica probabilística apropiada en $\mathbb{P}(S)$, y se asume que se cumple

$$\Delta^1(x) = \left| \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) - V_\alpha^*(x) \right| \leq C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right); \tag{3.6}$$

$$\Delta^2(x) = \left| \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - V_\alpha^*(x) \right| \leq C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \tag{3.7}$$

para algunas funciones $C^1(x), C^2(x)$. De las relaciones anteriores se tiene que, para cada $x \in X$,

$$-C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \leq \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) - V_\alpha^*(x) \leq C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right),$$

es decir

$$V_\alpha^*(x) \leq \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) + C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right);$$

y

$$-C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \leq \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - V_\alpha^*(x) \leq C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right),$$

es decir

$$V_\alpha^*(x) \geq \sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right).$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$,

$$\sup_{\pi^1 \in \Pi^1} V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \leq V_\alpha^*(x) \leq \inf_{\pi^2 \in \Pi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) + C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right),$$

lo cual implica que, para cualquier $\pi^1 \in \Pi^1$ y $\pi^2 \in \Pi^2$, se cumple que,

$$V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) - C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \leq V_\alpha^*(x) \leq V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right) + C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right). \tag{3.8}$$

Entonces, entre mejor sea la aproximación de G hacia $\widetilde{G}$, se tendría que,

$$C^2(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right) \approx 0 \approx C^1(x)\mu\left(G, \widetilde{G}\right). \tag{3.9}$$

Por otro lado, se sabe de (1.16) que π_* es un par óptimo, sí y sólo sí,

$$V_\alpha\left(x, \pi^1, \pi_*^2\right) \leq V_\alpha\left(x, \pi_*^1, \pi_*^2\right) = V_\alpha^*(x) \leq V_\alpha\left(x, \pi_*^1, \pi^2\right), \quad \forall\ (\pi_1, \pi_2) \in \Pi.$$

Así, si se tiene (3.9) y comparando (1.16) y (3.8), se tiene que,

$$V_\alpha\left(x, \pi^1, \widetilde{\pi}_*^2\right) \leq V_\alpha(x, \pi_*^1, \pi_*^2) \leq V_\alpha\left(x, \widetilde{\pi}_*^1, \pi^2\right),$$

por lo tanto, el par $\widetilde{\pi}_*$ sería una buena aproximación a π^*, conforme $\mu(G, \widetilde{G})$ se aproxime a cero.
Con todo lo anterior, el problema principal que estamos considerando es demostrar desigualdades de estabilidad del tipo

$$\left\{\Delta^1(x), \Delta^2(x)\right\} \leq C(x)\mu(G, \widetilde{G}). \tag{3.10}$$

Este problema se abordará para el caso de la métrica de la Variación Total y la métrica de Kantorovich.

3.3. Aproximación mediante la métrica de la Variación Total

Recordando que el problema que se esta considerando es demostrar desigualdades de estabilidad del tipo (3.10). En esta sección se considera a μ como la métrica de la Variación

Total W-ponderada (W-Variación Total), para la cual se impone la siguiente condición.

Hipótesis 3.1. *a) Existe una función medible $M : S \to [0, \infty)$ tal que,*

$$\sup_{(x,a,b)\in\mathbb{K}} \frac{W[F(x,a,b,s)]}{W(x)} \leq M(s), \quad s \in S; \tag{3.11}$$

b)

$$EM(\xi) < \infty, \quad EM(\widetilde{\xi}) < \infty. \tag{3.12}$$

Definición 3.3.1. *La métrica W-Variación Total, esta definida de la siguiente manera:*

$$\mathcal{V}(G, \widetilde{G}) := \sup_{g\in\mathcal{D}} |Eg(\xi) - Eg(\widetilde{\xi})|, \tag{3.13}$$

donde $\mathcal{D} := \{$todas las funciones medibles $g : S \to \mathbb{R}$ tales que $|g(s)| \leq M(s)$, $s \in S\}$.

Observación 3.2. *Bajo la Hipótesis 3.1, observe que la métrica (3.13) es finita.*

Ahora se presenta uno de los resultados principales de la tesis.

Teorema 3.1. *Supongamos que la Hipótesis 3.1 se satisface. Entonces*

$$\Delta^1(x) \leq \frac{2\alpha}{(1-\alpha\beta)^2} W(x)\mathcal{V}(G, \widetilde{G}), \quad x \in X, \tag{3.14}$$

y

$$\Delta^2(x) \leq \frac{2\alpha}{(1-\alpha\beta)^2} W(x)\mathcal{V}(G, \widetilde{G}), \quad x \in X. \tag{3.15}$$

donde $\mathcal{V}$ es la métrica W-Variación Total definida en (3.13).

Demostración. De la Observación 3.1 se sabe que el Teorema 2.1 se satisface. En este sentido, sean V_α^*, $\widetilde{V}_\alpha^*$ los valores de los juegos del modelo original y aproximado, y φ_*, $\widetilde{\varphi}_*$ los pares óptimos del juego original y aproximado para los jugadores 1 y 2.
De (3.4) y la definición de pares óptimos, para $x \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta^1(x) &= \left| \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\varphi}_*^1, \varphi^2\right) - V_\alpha^*(x) \right| \\
&= \Bigg| \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \widetilde{V}_\alpha\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \widetilde{V}_\alpha\left(x, \widetilde{\varphi}_*^1, \widetilde{\varphi}_*^2\right) \\
&\quad - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\varphi}_*^1, \varphi^2\right) \Bigg| \\
&\leq \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \left| \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \widetilde{V}_\alpha\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) \right| + \left| \widetilde{V}_\alpha\left(x, \widetilde{\varphi}_*^1, \widetilde{\varphi}_*^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x, \widetilde{\varphi}_*^1, \varphi^2\right) \right|,
\end{aligned}$$

así,

$$\Delta^1(x) \leq 2 \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)} \left| V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \right|.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\Delta^2\left(x\right) &= \left| \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} V_\alpha\left(x,\varphi^1,\widetilde{\varphi}^2_*\right) - V^*(x) \right| \\
&= \left| \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) + \widetilde{V}_\alpha\left(x,\widetilde{\varphi}^1_*,\widetilde{\varphi}^2_*\right) \right. \\
&\quad \left. - \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} V_\alpha\left(x,\varphi^1,\widetilde{\varphi}^2_*\right) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \left| \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \right| + \left| \widetilde{V}_\alpha\left(x,\widetilde{\varphi}^1_*,\widetilde{\varphi}^2_*\right) - \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} V_\alpha\left(x,\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2\right) \right|,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\Delta^2(x) \leq 2 \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi^1\times\Phi^2} \left| V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \right|.$$

Por lo tanto,

$$\left\{\Delta^1(x),\Delta^2(x)\right\} \leq 2 \sup_{\varphi\in\Phi} \left| V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \right|. \tag{3.16}$$

Para cada $\varphi \in \Phi$ y $u \in \mathbb{B}_W$, se define los operadores, $T_\varphi : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$ y $\widetilde{T}_\varphi : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$, como los siguientes (ver (2.3)):

$$\begin{aligned}
T_\varphi u\left(x\right) &:= r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) + \alpha \int_S u\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \\
\widetilde{T}_\varphi u\left(x\right) &:= r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) + \alpha \int_S u\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)
\end{aligned}$$

De la Proposición 2.1, se sabe que T_φ y $\widetilde{T}_\varphi$ son operadores contractivos en $\mathbb{B}_W$ con módulo $\alpha\beta$, es decir, para $u, v \in \mathbb{B}_W$:

$$\|T_\varphi u - T_\varphi v\|_W \leq \alpha\beta\|u-v\|_W; \quad \|\widetilde{T}_\varphi u - \widetilde{T}_\varphi v\|_W \leq \alpha\beta\|u-v\|_W. \tag{3.17}$$

Además, las funciones $V_\varphi, \widetilde{V}_\varphi$ son los puntos fijos de los operadores T_φ y $\widetilde{T}_\varphi$, respectivamente.

Para $\varphi \in \Phi$, $x \in X$ fijos, y recordando que $V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) := V_\varphi\left(x\right)$; observemos que,

$$\left| V_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \widetilde{V}_\alpha\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \right| = \left| V_\varphi\left(x\right) - \widetilde{V}_\varphi\left(x\right) \right| \leq W\left(x\right) \|V_\varphi - \widetilde{V}_\varphi\|_W. \tag{3.18}$$

Además,

$$\|V_\varphi - \widetilde{V}_\varphi\|_W \leq \|T_\varphi V_\varphi - T_\varphi \widetilde{V}_\varphi\|_W + \|T_\varphi \widetilde{V}_\varphi - \widetilde{T}_\varphi \widetilde{V}_\varphi\|_W,$$

lo cual implica

$$\|V_\varphi - \widetilde{V}_\varphi\|_W \leq \frac{1}{1-\alpha\beta}\|T_\varphi \widetilde{V}_\varphi - \widetilde{T}_\varphi \widetilde{V}_\varphi\|_W. \tag{3.19}$$

Por otro lado, por la definición de los operadores T_φ y $\widetilde{T}_\varphi$

$$\left\|T_\varphi \widetilde{V}_\varphi - \widetilde{T}_\varphi \widetilde{V}_\varphi\right\|_W \leq \alpha \sup_{x\in X}\left|\int_S \widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right) - \int_S \widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right|. \tag{3.20}$$

Por último, se observa lo siguiente;

$$\widetilde{V}_\varphi = \widetilde{T}_\varphi \widetilde{V}_\varphi - \widetilde{T}_\varphi 0 + \widetilde{T}_\varphi 0,$$

y usando el hecho que $\widetilde{T}_\varphi$ es de contracción, se tiene que,

$$\|\widetilde{V}_\varphi\|_W \leq \alpha\beta\|\widetilde{V}_\varphi - 0\|_W + \|\widetilde{T}_\varphi 0\|_W = \alpha\beta\|\widetilde{V}_\varphi\|_W + \|\widetilde{T}_\varphi 0\|_W,$$

entonces

$$\|\widetilde{V}_\varphi\|_W - \alpha\beta\|\widetilde{V}_\varphi\|_W = (1-\alpha\beta)\|\widetilde{V}_\varphi\|_W \leq \|\widetilde{T}_\varphi 0\|_W = \left\|r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)\right\|_W,$$

es decir,

$$\|\widetilde{V}_\varphi\|_W \leq \frac{1}{1-\alpha\beta}\sup_{x\in X}\frac{1}{W(x)}r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) \leq \frac{1}{1-\alpha\beta}.$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$.

$$\left|\widetilde{V}_\varphi(x)\right| \leq \frac{W(x)}{1-\alpha\beta}.$$

A partir de esta última desigualdad y de la Hipótesis 3.1, se obtiene que para cada $s \in S$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{\widetilde{V}_\varphi\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,s\right)\right]}{W(x)}\right| &\leq \frac{1}{1-\alpha\beta}\frac{W\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,s\right)\right]}{W(x)} \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha\beta}M(s),\end{aligned} \tag{3.21}$$

y

$$\left|\frac{1-\alpha\beta}{W(x)}\widetilde{V}_\varphi\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,s\right)\right]\right| \leq M(s).$$

De la definición de la familia de funciones $\mathcal{D}$, se concluye que $g(s) := \frac{1-\alpha\beta}{W(x)}\widetilde{V}_\varphi\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,s\right)\right] \in \mathcal{D}$.

Finalmente, la demostración de las desigualdades (3.14) y (3.15) se seguirá de (3.16), (3.18), (3.19), (3.20) y la definición de la métrica $\mathcal{V}$ en (3.13). En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\{\Delta^1(x),\Delta^2(x)\right\} &\leq 2\sup_{\varphi\in\Phi}\left|V_\alpha(x,\varphi^1,\varphi^2)-\widetilde{V}_\alpha(x,\varphi^1,\varphi^2)\right| \\
&\leq 2\sup_{\varphi\in\Phi}W(x)\|V_\varphi-\widetilde{V}_\varphi\|, \qquad \text{de (3.18)} \\
&\leq 2\sup_{\varphi\in\Phi}W(x)\frac{1}{1-\alpha\beta}\|T_\varphi\widetilde{V}_\varphi-\widetilde{T}_\varphi\widetilde{V}_\varphi\|, \qquad \text{de (3.19)} \\
&\leq 2\sup_{\varphi\in\Phi}W(x)\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\sup_{x\in X}\left|\frac{\int_S\widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)}{W(x)}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\int_S\widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)}{W(x)}\right|, \qquad \text{de (3.20)} \\
&= 2\sup_{\varphi\in\Phi}W(x)\frac{\alpha}{(1-\alpha\beta)^2}\sup_{x\in X}\left|\frac{(1-\alpha\beta)\int_S\widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)}{W(x)}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{(1-\alpha\beta)\int_S\widetilde{V}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)}{W(x)}\right| \\
&= 2\sup_{\varphi\in\Phi}W(x)\frac{\alpha}{(1-\alpha\beta)^2}\sup_{x\in X}\left|Eg(\xi)-Eg(\widetilde{\xi})\right| \\
&\leq \frac{2\alpha}{(1-\alpha\beta)^2}W(x)\sup_{g\in\mathcal{D}}\left|Eg(\xi)-Eg(\widetilde{\xi})\right| \\
&= \frac{2\alpha}{(1-\alpha\beta)^2}W(x)\mathcal{V}(G,\tilde{G}).
\end{aligned}$$

■

3.4. Aproximación mediante la métrica de Kantorovich

En la sección anterior se presentó un resultado para los índices de estabilidad en términos de la métrica W-Variación Total. La desventaja del uso de esta métrica es que es una métrica fuerte, en el sentido que metriza la convergencia fuerte de medidas de probabilidad (véase Apéndice B y D). En esta sección se presentará otro resultado que muestra la desigualdad tipo (3.10), donde μ es la métrica de Kantorovich $\mathcal{K}$. Esta métrica, es una métrica débil, es decir, $\mathcal{K}$ metriza la convergencia débil de medidas de probabilidad (Apéndice B) y se define de la siguiente manera:

Definición 3.4.1. *La métrica de Kantorovich $\mathcal{K}$ se define como sigue. Para ξ y $\widetilde{\xi}$ vectores aleatorios en S, con distribución G y $\widetilde{G}$ respectivamente,*

$$\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right) := \sup_{g\in\mathcal{J}}\left|Eg\left(\xi\right) - Eg\left(\widetilde{\xi}\right)\right|, \tag{3.22}$$

donde $\mathcal{J} := \{g : S \to \mathbb{R} : |g\left(\xi\right) - g\left(\xi'\right)| \leq \rho\left(\xi,\xi'\right), \xi,\xi' \in S\}$, *y ρ es una métrica en S.*

Observación 3.3. *Para $S = \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{K}\left(F_{\xi}, F_{\widetilde{\xi}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_{\xi}\left(s\right) - F_{\widetilde{\xi}}\left(s\right)\right| ds,$$

donde F_{ξ} y $F_{\widetilde{\xi}}$ son las funciones de distribución de ξ y $\widetilde{\xi}$, [27].

Antes de demostrar nuestro Teorema principal, primero se establece el siguiente resultado general.

Teorema 3.2. *Bajo las Hipótesis 2.1 y 2.2 se tiene que:*

$$\Delta^{1}\left(x\right) \leq 2\alpha\left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\left(1-\alpha\beta\right)^{2}}W\left(x\right)\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right); \tag{3.23}$$

$$\Delta^{2}\left(x\right) \leq 2\alpha\left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\left(1-\alpha\beta\right)^{2}}W\left(x\right)\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right), x \in X. \tag{3.24}$$

donde

$$\begin{aligned}\varrho\left(G,\widetilde{G}\right) &:= \sup_{(x,\varphi^1,\varphi^2)}\left\{\left|EV_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]-EV_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\right|\right\}\\ &= \sup_{(x,\varphi^1,\varphi^2)}\left\{\left|\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)-\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right|\right\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Demostración. La demostración se hará para el índice de estabilidad del jugador 1, es decir para (3.23), y para (3.24) se procede de manera análoga. De acuerdo a la observación (3.1), sean V_α^* y $\widetilde{V}_\alpha^*$ los valores de los juegos original y perturbado, y $\varphi_*, \widetilde{\varphi}_*$ los correspondientes pares óptimos. Entonces:

$$V_\alpha^*\left(x\right)=\inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\left\{r\left(x,\varphi_*^1,\varphi^2\right)+\alpha\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi_*^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)\right\},\ x\in X; \tag{3.26}$$

$$\widetilde{V}_\alpha^*\left(x\right)=\inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\left\{r\left(x,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2\right)+\alpha\int_S \widetilde{V}_\alpha^*\left[F\left(x,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right\},\ x\in X. \tag{3.27}$$

Para cada (x,φ^1,φ^2) se define:

$$\begin{aligned}H\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) &:= r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)+\alpha\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right);\\ \widetilde{H}\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) &:= r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)+\alpha\int_S \widetilde{V}_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right),\end{aligned} \tag{3.28}$$

y sea $\Gamma_t=\{x,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2,x_1,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2,\ldots,x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\}$, la historia del proceso bajo el par $\widehat{\varphi}=(\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2)$. Por la propiedad de Markov del proceso, (ver (1.10)) se tiene

$$\begin{aligned}\zeta_t &:= E_x^{\widehat{\varphi}}\left[\alpha V_\alpha^*\left(x_t\right)\mid\Gamma_t\right]\\ &= H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right)-r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right)-\inf_{\varphi^2\in\Phi^2}H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right)+\inf_{\varphi^2\in\Phi^2}H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right).\end{aligned}$$

Lo anterior se debe, ya que por definición;

$$\begin{aligned}E_x^{\widehat{\varphi}}\left[\alpha V_\alpha^*(x_t)|\Gamma_t\right] &= E_x^{\widehat{\varphi}}\left[\alpha V_\alpha^*(x_t)|x,\widetilde{\varphi}^1,\varphi_*^2,x_1,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2,\ldots,x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right]\\ &= E_x^{\widehat{\varphi}}\left[\alpha V_\alpha^*(x_t)|x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right]\\ &= \alpha E_x^{\widehat{\varphi}}V_\alpha^*\left[F(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2,\xi_t)\right]\\ &= H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right)-r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right).\end{aligned}$$

En vista de (3.26) y (3.28) se obtiene:

$$\begin{aligned}\zeta_t &= H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right) - r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) + V_\alpha^*\left(x_{t-1}\right)\\ &= \Lambda_t - r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) + V_\alpha^*\left(x_{t-1}\right),\end{aligned}$$

donde

$$\Lambda_t := H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right). \tag{3.29}$$

De este modo

$$\begin{aligned}E_x^{\widehat{\varphi}}\alpha V_\alpha^*\left(x_t\right) &= E_x^{\widehat{\varphi}}\zeta_t\\ &= E_x^{\widehat{\varphi}}\Lambda_t - E_x^{\widehat{\varphi}} r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) + E_x^{\widehat{\varphi}} V_\alpha^*\left(x_{t-1}\right).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Multiplicando por α^{t-1} en (3.30) y sumando para $1\leq t\leq n$, se tiene

$$\sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}} r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) = \sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}\left[E_x^{\widehat{\varphi}}V_\alpha^*\left(x_{t-1}\right) - E_x^{\widehat{\varphi}}\alpha V_\alpha^*\left(x_t\right)\right] + \sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}}\Lambda_t,$$

lo cual implica

$$\sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}} r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - V_\alpha^*\left(x\right) = -\alpha^n E_x^{\widehat{\varphi}}V_\alpha^*\left(x_n\right) + \sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}}\Lambda_t. \tag{3.31}$$

Ya que, $V_\alpha^*\in\mathbb{B}_W$ del Lema 2.1.1(c) se sigue que, $\lim_{n\to\infty}\alpha^n E_x^{\widehat{\varphi}}V_\alpha^*\left(x_n\right)=0$. De este hecho y tomando el límite cuando $n\to\infty$ en (3.31) resulta, (ver 3.4)

$$\Delta^1\left(x\right) = \sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}} r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - V_\alpha^*\left(x\right) = \sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}}\Lambda_t. \tag{3.32}$$

Ahora, por la definición de Λ_t en (3.29) se obtiene lo siguiente

$$\Lambda_t = H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\widetilde{\varphi}_*^2\right) + \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right),$$

entonces,

$$\begin{aligned}\left|\Lambda_t\right| &= \left|H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\widetilde{\varphi}_*^2\right) + \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right)\right|\\ &\leq \left|H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi_*^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\widetilde{\varphi}_*^2\right)\right| + \left|\inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi^2\right)\right|.\end{aligned}$$

De este modo, por (3.28),

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_t| &\leq 2 \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| H\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2\right) \right| \\
&= 2\alpha \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S \widetilde{V}_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right|.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

De aquí,

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_t| &\leq 2\alpha \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right| \\
&+ 2\alpha \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| \int_S V_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) - \int_S \widetilde{V}_\alpha^* \left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right|.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

En vista de (3.25) el primer sumando del lado derecho de (3.34) está acotado por $2\alpha\varrho\left(G,\widetilde{G}\right)$. El segundo sumando es menor que

$$
\begin{aligned}
&2\alpha \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \int_S W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \left| \frac{V_\alpha^*\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]}{W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\widetilde{V}_\alpha^*\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]}{W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]} \right| \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \\
&\leq 2\alpha \|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\| \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \int_S W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right).
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Ahora necesitamos acotar el último factor del lado derecho de (3.35). Del Lema 2.1.1(a) y Observación 2.1, se obtiene que para cada $t \in \mathbb{N}$,

$$
\int_S W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \leq \beta^{t-1} W\left(x\right). \tag{3.36}
$$

Por otro lado, del Teorema 2.1, las funciones V_α^* y $\widetilde{V}_\alpha^*$ son puntos fijos de los operadores T y $\widetilde{T}$, y además

$$
\begin{aligned}
\|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_W &= \|TV_\alpha^* - \widetilde{T}V_\alpha^*\|_W + \|\widetilde{T}V_\alpha^* - \widetilde{T}\widetilde{V}_\alpha^*\|_W \\
&\leq \|TV_\alpha^* - \widetilde{T}V_\alpha^*\|_W + \alpha\beta\|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_W.
\end{aligned}
$$

Esto implica, por (3.25),

$$
\begin{aligned}
\|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_W &\leq \frac{1}{1-\alpha\beta}\|TV_\alpha^* - \widetilde{T}V_\alpha^*\|_W \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\sup_{x\in X} W^{-1}(x) \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi}\left|\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)\right. \\
&\left.-\int_S V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right| \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\varrho\left(G,\widetilde{G}\right).
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Combinando las desigualdades (3.34)-(3.37) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
E_x^{\widehat{\varphi}}\left|\Lambda_t\right| &\leq 2\alpha\varrho\left(G,\widetilde{G}\right)+\leq 2\alpha\|V_\alpha^*-\widetilde{V}_\alpha^*\|\sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi}\int_S W\left[F\left(x_{t-1},\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \\
&\leq 2\alpha\varrho\left(G,\widetilde{G}\right)+\leq 2\alpha\|V_\alpha^*-\widetilde{V}_\alpha^*\|\beta^{t-1}W(x) \\
&\leq 2\alpha\varrho\left(G,\widetilde{G}\right)+\leq 2\alpha\frac{\alpha\varrho\left(G,\widetilde{G}\right)}{1-\alpha\beta}\beta^{t-1}W(x) \\
&= 2\alpha\left[1+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\beta^{t-1}W\left(x\right)\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right),
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\Delta^1\left(x\right)=\sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}E_x^{\widehat{\varphi}}\Lambda_t &\leq \sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}2\alpha\left[1+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\beta^{t-1}W\left(x\right)\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right) \\
&= 2\alpha\left[\sum_{t=1}^{\infty}\alpha^{t-1}+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}W\left(x\right)\sum_{t=1}^{\infty}\left(\alpha\beta\right)^{t-1}\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right) \\
&= 2\alpha\left[\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}W\left(x\right)\frac{1}{1-\alpha\beta}\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right) \\
&= 2\alpha\left[\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\left(1-\alpha\beta\right)^2}W\left(x\right)\right]\varrho\left(G,\widetilde{G}\right).
\end{aligned}
$$

Análogamente se prueba para $\Delta^2(x)$. ■

Para establecer el resultado principal, se necesita el siguiente conjunto de condiciones.

Hipótesis 3.2. *a) Existen una constante L_0 y una función medible $\overline{L}_1 : S \to [0,\infty)$ tal que, $\forall\,(x,a,b),(y,a,b)\in\mathbb{K}$:*

$$
|r(x,a,b)-r(y,a,b)|\leq L_0 d(x,y), \tag{3.38}
$$

$$
d[F(x,a,b,\xi),F(y,a,b,\xi)]\leq \overline{L}_1(\xi)d(x,y), \tag{3.39}
$$

$$E\overline{L}_1(\xi) = L_1 \ y \ \alpha L_1 < 1.$$

Donde, d es la métrica en el espacio de estados X.

b) Existe una constante $L_* < \infty$ tal que para toda $(x, a, b) \in \mathbb{K}$; $\xi, \xi' \in S$,

$$d[F(x, a, b, \xi), F(x, a, b, \xi')] \leq L_* \rho(\xi, \xi'). \tag{3.40}$$

Donde, ρ es la métrica en el conjunto S.

c) A y B son compactos, además $A(x) = A$ y $B = B(x)$ para toda $x \in X$.

Teorema 3.3. *Bajo la Hipótesis (3.2) se obtiene lo siguiente:*

$$\Delta^1(x) \leq 2\alpha \frac{L_* L_0}{1 - \alpha L_1} \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{(1-\alpha\beta)^2} W(x) \right] \mathcal{K}\left(G, \widetilde{G}\right), \ x \in X. \tag{3.41}$$

$$\Delta^2(x) \leq 2\alpha \frac{L_* L_0}{1 - \alpha L_1} \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{(1-\alpha\beta)^2} W(x) \right] \mathcal{K}\left(G, \widetilde{G}\right), \ x \in X. \tag{3.42}$$

Demostración. En vista de la Definición (3.4.1) de la métrica de Kantorovich $\mathcal{K}$ y de (3.25), la desigualdad (3.41) y (3.42) se seguirá de (3.23) si se establece que para cada $(x, \varphi^1, \varphi^2)$ la función $V_\alpha^*[F(x, \varphi^1, \varphi^2, \cdot)]$ es de Lipschitz en S. Para esto primero se define lo siguiente:

Sean $\{V_t\} \subset \mathbb{B}_W$ las funciones de iteración de valores dadas por;

$$V_0 := 0;$$

y para $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_t(x) &:= \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_S V_{t-1}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \right\} \\ &= \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_S V_{t-1}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \right\}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Se demuestra que, bajo la Hipótesis 3.2(a)-(b), para cada $t \in \mathbb{N}_0$ la función V_t es de Lipschitz en X con constante $L_0 \sum_{n=0}^{t-1} (\alpha L_1)^n$, y además, el valor del juego V_α^* es de Lipschitz en X con constante $\frac{L_0}{1 - \alpha L_1}$.

Se procede primero a demostrar que V_t es de Lipschitz, esto se hará por inducción. Para $V_0 = 0$ se cumple. Ahora se asume que V_{t-1} es de Lipschitz con constante $L_0 \sum_{n=0}^{t-2} (\alpha L_1)^n$. Entonces para cada $x, y \in X$ de la Hipótesis 3.2 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|V_t(x) - V_t(y)| \leq & \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \left\{ \left| r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - r\left(y, \varphi^1, \varphi^2\right) \right| + \alpha \left| \int_S V_{t-1}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \right.\right. \\
& \left.\left. - \int_S V_{t-1}\left[F\left(y, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \right| \right\} \\
& \leq L_0 d(x, y) + \alpha \sup_{\varphi \in \Phi} \int_S \left| V_{t-1}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] - V_{t-1}\left[F\left(y, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] \right| G(d\xi) \\
& \leq L_0 d(x, y) + \alpha L_0 \sum_{n=0}^{t-2} (\alpha L_1)^n \int_S d\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right), F\left(y, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \\
& \leq L_0 d(x, y) + \alpha L_0 \sum_{n=0}^{t-2} (\alpha L_1)^n L_1 d(x, y) \\
& = L_0 d(x, y) + L_0 \sum_{n=0}^{t-2} (\alpha L_1)^{n+1} d(x, y) \\
& = L_0 \sum_{n=0}^{t-1} (\alpha L_1)^n d(x, y).
\end{aligned}
$$

Solo falta ver que V_α^* es de Lipschitz en X. Antes de eso observe que,

$$
\|V_t - V_\alpha^*\|_W \to 0, \text{ cuando } t \to \infty,
$$

donde V_α^* es el valor del juego. En efecto, de la Hipótesis 2.1(b) para cada $x \in X$

$$
\begin{aligned}
|V_t(x) - V_\alpha^*(x)| & \leq \sup_{\varphi \in \Phi} \alpha \int_S \left| V_{t-1}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] - V_\alpha^*\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] \right| G(d\xi) \\
& \leq \alpha \|V_{t-1} - V_\alpha^*\|_W \sup_{\varphi \in \Phi} \int_S W\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G(d\xi) \\
& \leq \alpha\beta \|V_{t-1} - V_\alpha^*\|_W W(x),
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\|V_t - V_\alpha^*\|_W \leq \alpha\beta \|V_{t-1} - V_\alpha^*\|_W \tag{3.43}
$$

Ya que, $V_t, V_\alpha^* \in \mathbb{B}_W$ se tiene que $\lim_{t\to\infty} \|V_t - V_\alpha^*\|_W < \infty$. Por lo tanto, tomando el límite en (3.43) y usando el hecho que $\alpha\beta < 1$, se obtiene que,

$$
\lim_{t\to\infty} \|V_t - V_\alpha^*\|_W = 0. \tag{3.44}
$$

Además, dado que $\alpha L_1 < 1$, se satisface que,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{t} (\alpha L_1)^n = \frac{1}{1-\alpha L_1}. \tag{3.45}$$

Por otro lado, para $x, y \in X$ se tiene que,

$$\begin{aligned} |V_\alpha^*(x) - V_\alpha^*(y)| &\leq |V_\alpha^*(x) - V_t(x)| + |V_t(x) - V_t(y)| + |V_t(y) - V_\alpha^*(y)| \\ &\leq |V_\alpha^*(x) - V_t(x)| + L_0 \sum_{n=0}^{t} (\alpha L_1)^n \, d(x,y) + |V_t(y) - V_\alpha^*(y)| \,. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $t \to \infty$ en la desigualdad anterior, de (3.44) y de (3.45) se sigue que,

$$|V_\alpha^*(x) - V_\alpha^*(y)| \leq \frac{L_0}{1-\alpha L_1} d(x,y).$$

De aquí se concluye que, V_α^* es de Lipschitz en X. Luego, de la Hipótesis 3.2(b), $V_\alpha^*\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\cdot\right)\right]$ es de Lipschitz en S y además,

$$\varrho\left(G,\widetilde{G}\right) \leq L_* \frac{L_0}{1-\alpha L_1} \mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right),$$

y así, de (3.23) y (3.24) se sigue la desigualdad (3.41) y (3.42).

■

Capítulo 4

Estabilidad caso Promedio

4.1. Introducción

Ahora interesa analizar el índice de estabilidad para el juego de pago promedio, es decir, el juego en (1.3) con el pago promedio esperado (1.13):

$$J\left(x, \pi^1, \pi^2\right) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^{\pi} \sum_{t=0}^{n-1} r\left(x_t, a_t, b_t\right), \quad x \in X.$$

Como en el caso del juego descontado, se considera modelos de juegos de ecuaciones en diferencias (consulte Sección 1.3), suponiendo que $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con función de distribución desconocida G.
De igual manera se consideran dos modelos de juegos de Markov de suma cero a tiempo discreto $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ que se definen en el mismo espacio de estados X y acciones A, B (véase Sección 1.1), con función de distribución G y $\widetilde{G}$, respectivamente. También se supone que bajo las hipótesis adecuadas, (Sección 2.2), existen los pares óptimos (estrategias óptimas) para el juego promedio, π_* y $\widetilde{\pi}_*$, respectivamente.

4.2. Índice de estabilidad

Sea $\widetilde{\mathcal{GM}}$ el modelo de juego aproximado para (1.1) cuyo proceso de estados evoluciona como (3.2).

De igual manera como se definió en (3.3), se define el pago promedio esperado para (3.2) como:

$$\tilde{J}\left(x,\pi^1,\pi^2\right) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{E}_x^{\pi}\sum_{t=1}^{n} r\left(\tilde{x}_{t-1},a_t,b_t\right), \quad x\in X. \tag{4.1}$$

Observación 4.1. *De aquí en adelante se asume que los modelos $\mathcal{GM}$ y $\widetilde{\mathcal{GM}}$ satisfacen las Hipótesis 2.3 y 2.4. Bajo estás dos Hipótesis y ya sea usando el método del factor de descuento desvaneciente o el método del punto fijo (consulte Secciones 2.2.1, 2.2.2), el Teorema 2.2 o el Teorema 2.4 garantizan la existencia de los valores óptimos del juego J_* y $\widetilde{J}_*$ para el modelo original y el modelo aproximado, además también existen las estrategias óptimas π_*^1, $\widetilde{\pi}_*^1$ y π_*^2, $\widetilde{\pi}_*^2$, para los jugadores 1 y 2.*

Definición 4.2.1. *Sea $\widetilde{\pi}_*$ el par óptimo para el juego promedio (3.2), y sea J_* el valor del juego (1.3). Se define:*

a) El índice de estabilidad para el jugador 1,

$$\Delta^1(x) = \left|\inf_{\pi^2\in\Pi^2} J\left(x,\widetilde{\pi}_*^1,\pi^2\right) - J_*\right|, \quad x\in X. \tag{4.2}$$

b) El índice de estabilidad para el jugador 2,

$$\Delta^2(x) = \left|\sup_{\pi^1\in\Pi^1} J\left(x,\pi^1,\widetilde{\pi}_*^2\right) - J_*\right|, \quad x\in X. \tag{4.3}$$

4.3. Aproximación por la métrica de Kantorovich

Se presentará una desigualdad de estabilidad del tipo

$$\left\{\Delta^1(x),\Delta^2(x)\right\} \le C\mathcal{K}(G,\widetilde{G}), \tag{4.4}$$

para el caso promedio donde $\mathcal{K}(G,\widetilde{G})$ es la métrica de Kantorovich definida en (3.4.1). Para lograr lo anterior, primero se requiere de otro conjunto de hipótesis.

Hipótesis 4.1. *Existen constantes finitas L, L_1 y L_* tales que:*

a) $|r(\boldsymbol{k}) - r(\boldsymbol{k}')| \le L_1\varpi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$, $\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'\in\mathbb{K}$,
donde $\varpi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') := \max\left\{d(x,x'), d_A(a,a'), d_B(b,b')\right\}$ *y d_A, d_B representan las métricas de los conjuntos A y B, respectivamente.*

b) $d_W\left(F\left(\boldsymbol{k},\xi\right),F\left(\boldsymbol{k}',\xi\right)\right)\leq L\varpi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$, $\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'\in\mathbb{K}$, *donde*

$$d_W\left(\zeta,\tilde{\zeta}\right):=\sup_{u:|u|\leq W}\left|Eu\left(\zeta\right)-Eu\left(\tilde{\zeta}\right)\right|, \tag{4.5}$$

para elementos aleatorios $\zeta,\tilde{\zeta}$ *en* X.

c) $\sup_{(x,a,b)\in\mathbb{K}} d\left(F\left(x,a,b,\xi\right),F\left(x,a,b,\xi'\right)\right)\leq L_*\rho(\xi,\xi')$, $s,s'\in S$;

d) A *y* B *son compactos, además* $A(x)=A$ *y* $B=B(x)$ *para toda* $x\in X$.

En términos de la métrica de Kantorovich (Definición 3.4.1) para el caso promedio, se tiene el siguiente resultado para el índice de estabilidad de los jugadores 1 y 2.

Teorema 4.1. *Bajo la Hipótesis 4.1 se cumple que:*

$$\Delta^1\left(x\right)\leq 6L_*\left[1+\frac{d}{\left(1-\lambda\right)^2}\right]\left[L_1+\frac{L}{1-\lambda}\max\left\{1,\frac{d}{1-\lambda}\right\}\right]\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right); \tag{4.6}$$

$$\Delta^2\left(x\right)\leq 6L_*\left[1+\frac{d}{\left(1-\lambda\right)^2}\right]\left[L_1+\frac{L}{1-\lambda}\max\left\{1,\frac{d}{1-\lambda}\right\}\right]\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right). \tag{4.7}$$

Demostración. La demostración de Teorema 4.1 se divide en varias partes.
Parte I: Una cota para $\{\Delta^1(x),\Delta^2(x)\}$ en términos de promedios.
Se demostrará la relación (4.6) para el índice del jugador 1; para (4.7) se procede análogamente. Del Teorema 2.2 o el Teorema 2.4 y de la Observación 4.1, se garantiza la existencia de las funciones $h,\tilde{h}\in\mathbb{B}_W$, los valores J_* y $\tilde{J}_*$, así como φ_* y $\widetilde{\varphi}_*$ tal que,

$$\begin{aligned} h(x) &= \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\left[r\left(x,\varphi_*^1,\varphi^2\right)-J_*+\int_S h\left[F\left(x,\varphi_*^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)\right] \\ &= \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\sup_{\varphi^1\in\Phi^1}\left[r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)-J_*+\int_S h\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)\right]; \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\left[r\left(x,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2\right)-\tilde{J}_*+\int_S \tilde{h}\left[F\left(x,\widetilde{\varphi}_*^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right] \\ &= \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\sup_{\varphi^1\in\Phi^1}\left[r\left(x,\widetilde{\varphi}^1,\widetilde{\varphi}^2\right)-\tilde{J}_*+\int_S \tilde{h}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para cada (x,φ^1,φ^2) se define lo siguiente:

$$H\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right):=r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)+\int_S h\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)-J_*, \tag{4.10}$$

$$\widetilde{H}\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) := r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) + \int_S \tilde{h}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right]\widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) - \tilde{J}_*. \tag{4.11}$$

Sea

$$\Gamma_t := \left\{x,\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*,x_1,\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*,\ldots,x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right\},(t\geq 1),$$

la historia bajo $\widehat{\varphi}=(\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*)$ hasta el tiempo t para el proceso (1.3). Usando (4.8)-(4.11) y la propiedad de Markov (ver (1.10)) se puede escribir lo siguiente;

$$\begin{aligned}
\zeta_t &:= E^{\widehat{\varphi}}_x\left[h(x_t)|\Gamma_t\right] = H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) - r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) + J_* \\
&= H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi^1_*,\varphi^2\right) + h\left(x_{t-1}\right) - r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) + J_* \\
&= \Lambda_t - r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) + h\left(x_{t-1}\right) + J_*,
\end{aligned}$$

donde,

$$\Lambda_t := H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi^1_*,\varphi^2\right). \tag{4.12}$$

Ahora, aplicando argumentos similares como en (3.29)-(3.32), es fácil obtener:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E^{\widehat{\varphi}}_x r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) = J_* + \frac{1}{n}\left[h\left(x\right) - E^{\widehat{\varphi}}_x h\left(X_n\right)\right] + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E^{\widehat{\varphi}}_x \Lambda_t. \tag{4.13}$$

Entonces, tomando el límite superior cuando $n\to\infty$ y dado que $h\in\mathbb{B}_W$, del Lema 2.2.1(b) resulta,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E^{\widehat{\varphi}}_x r\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) = J_* + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E^{\widehat{\varphi}}_x \Lambda_t.$$

Por la definición del índice de estabilidad en (4.2) se obtiene, de (4.13),

$$\Delta^1(x) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E^{\widehat{\varphi}}_x \Lambda_t. \tag{4.14}$$

Parte II: Una cota para Λ_t.

En vista de (4.11) y (4.12) se tiene que,

$$\Lambda_t = H\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2_*\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\widetilde{\varphi}^2_*\right) + \inf_{\varphi^2\in\Phi^2}\widetilde{H}\left(x_{t-1},\widetilde{\varphi}^1_*,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1},\varphi^1_*,\varphi^2\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\Lambda_t| &\leq \left| H\left(x_{t-1}, \widetilde{\varphi}_*^1, \varphi_*^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1}, \widetilde{\varphi}_*^1, \widetilde{\varphi}_*^2\right) \right| + \left| \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \widetilde{H}\left(x_{t-1}, \widetilde{\varphi}_*^1, \varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} H\left(x_{t-1}, \varphi_*^1, \varphi^2\right) \right| \\ &\leq 2 \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| H\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2\right) \right| \\ &\leq 2\left| J_* - \tilde{J}_* \right| + 2I_t, \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde

$$I_t := \sup_{\varphi\in\Phi} \left| \int_S h\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S \tilde{h}\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right|. \tag{4.16}$$

Ahora se centrará a encontrar una cota superior para I_t. Observe que

$$\begin{aligned} I_t &\leq \sup_{\varphi\in\Phi} \left| \int_S h\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S h\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right| \\ &\quad + \sup_{\varphi\in\Phi} \int_S \left| h\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] - \tilde{h}\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \right| \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Para evaluar el segundo sumando en el lado derecho de (4.17) se introduce el siguiente par de operadores $T, \widetilde{T} : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$ y $x \in X$:

$$Tu(x) := \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - J_* + \int_S u\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \phi\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) \int_X u d\nu \right\}; \tag{4.18}$$

$$\widetilde{T}u(x) := \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \tilde{J}_* + \int_S u\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) - \phi\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) \int_X u d\nu \right\}. \tag{4.19}$$

De la Proposición 2.2 se sabe que los operadores anteriores son de contracción modulo λ y además

$$Th = h; \quad \widetilde{T}\tilde{h} = \tilde{h}. \tag{4.20}$$

donde h y $\tilde{h}$ son respectivamente las soluciones de las ecuaciones (4.8) y (4.9).

Volviendo a (4.17) se tiene que, multiplicando por $\dfrac{W\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right]}{W\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right]}$, se cumple

$$\sup_{\varphi\in\Phi} \int_S \left| h\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] - \tilde{h}\left[F\left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \right| \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right)$$

$$\leq \left\| h - \tilde{h} \right\|_W \sup_{\varphi \in \Phi} \int_S W \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi} \right) \right] \widetilde{G} \left(d\widetilde{\xi} \right). \tag{4.21}$$

Del Lema 2.2.1 y Observación 2.6 se obtiene que para cada $t \geq 1$ y $x \in X$,

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \int_S W \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi} \right) \right] \widetilde{G} \left(d\widetilde{\xi} \right) \leq \lambda^t W(x) + \frac{d}{1-\lambda}, \tag{4.22}$$

Con respecto al primer factor en el lado derecho de (4.21) se tiene:

$$\|h - \tilde{h}\|_W \leq \|Th - \widetilde{T}h\|_W + \|\widetilde{T}h - \widetilde{T}\tilde{h}\|_W \leq \|Th - \widetilde{T}h\|_W + \lambda \|h - \tilde{h}\|_W,$$

o

$$\begin{aligned}
\|h - \tilde{h}\|_W \;\leq\; & \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} \frac{1}{W(x)} \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| -J_* + \int_S h \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \xi \right) \right] G\left(d\xi \right) + \tilde{J}_* \right. \\
& \left. - \int_S h \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi} \right) \right] \widetilde{G} \left(d\widetilde{\xi} \right) \right| \\
\leq\; & \frac{1}{1-\lambda} \left[|J_* - \tilde{J}_*| + \sup_{(x,\varphi)} \left| \int_S h \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \xi \right) \right] G\left(d\xi \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_S h \left[F \left(x_{t-1}, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi} \right) \right] \widetilde{G} \left(d\widetilde{\xi} \right) \right| \right].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Combinando las desigualdades (4.15), (4.17), (4.21), (4.22) y (4.23) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
|\Lambda_t| \;\leq\; & 2 \left\{ \left(1 + \frac{d}{(1-\lambda)^2} \right) |J_* - \tilde{J}_*| + \left(1 + \frac{d}{(1-\lambda)^2} \right) \mathcal{Q} \right. \\
& \left. + \lambda^t W(x) \left[\frac{1}{1-\lambda} |J_* - \tilde{J}_*| + \frac{1}{1-\lambda} \mathcal{Q} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

donde

$$\mathcal{Q} := \sup_{(x,\varphi)} \left| \int_S h \left[F \left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi \right) \right] G\left(d\xi \right) - \int_S h \left[F \left(x, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi} \right) \right] \widetilde{G} \left(d\widetilde{\xi} \right) \right|. \tag{4.25}$$

Parte III: Propiedades de Lipschitz para h.

Primero se demuestra que para cada $(x, \varphi^1, \varphi^2)$ la función $h \left[F \left(x, \varphi^1, \varphi^2, \cdot \right) \right]$ en (4.25) es Lipschitz en S con la constante

$$\vartheta := L_* \left[L_1 + \frac{L}{1-\lambda} \max \left\{ 1, \frac{d}{1-\lambda} \right\} \right]. \tag{4.26}$$

Usando (4.20) y la propiedad contractiva de T se obtiene:

$$\|h\|_W = \|Th - T0 + T0\|_W \leq \lambda \|h\|_W + \|T0\|_W.$$

Por lo tanto, en vista de (4.18),

$$\|h\|_W \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x\in X} \frac{1}{W(x)} \left| \sup_{\varphi^1\in\Phi^1} \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} r\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - J_* \right|. \tag{4.27}$$

Usando la Hipótesis 2.3(e) y el Lema 2.2.1 se observa que:

$$\begin{aligned} J_* &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} E_x^{\varphi^*} r\left(x_{t-1},\varphi_*^1,\varphi_*^2\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} E_x^{\varphi^*} W\left(x_{t-1}\right) \leq \frac{d}{1-\lambda}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

De (4.27) y (4.28) se obtiene:

$$\|h\|_W \leq \frac{1}{1-\lambda} \max\left\{1, \frac{d}{1-\lambda}\right\} := \overline{r}. \tag{4.29}$$

Sean $\mathbf{k} = (x,\varphi^1,\varphi^2)$, $\mathbf{k}' = (x',\varphi'^1,\varphi'^2) \in \mathbb{K}$ arbitrarios. Ahora se encontrará una constante $K < \infty$ tal que la siguiente función involucrada en la ecuación (4.8):

$$g(\mathbf{k}) := r(\mathbf{k}) + \int_S h\left[F\left(\mathbf{k},\xi\right)\right] G\left(d\xi\right),$$

es Lipschitz con esa constante K. Se puede ver de la Hipótesis 4.1(a) y (b) que en vista de (4.29) y la definición de la métrica d_W en (4.5),

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{k}) - g(\mathbf{k}')| &\leq L_1\varpi(\mathbf{k},\mathbf{k}') + \left| \int_S h\left[F\left(\mathbf{k},\xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S h\left[F\left(\mathbf{k}',\xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right| \\ &\leq L_1\varpi(\mathbf{k},\mathbf{k}') + \overline{r}L\varpi(\mathbf{k},\mathbf{k}') \leq K\varpi(\mathbf{k},\mathbf{k}'), \end{aligned}$$

donde $K := L_1 + \overline{r}L$. Usando la ecuación (4.8) y la Hipótesis 4.1(a), (b) y (d) se observa que para probar que h es de Lipschitz con la constante L_*K en S basta probar la siguiente afirmación:

Para una función $g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ que satisface,

$$|g\left(\mathbf{k}\right) - g\left(\mathbf{k}'\right)| \leq K\varpi(\mathbf{k},\mathbf{k}'); \quad \mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathbb{K},$$

resulta que

$$g(x,y) := \left| \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} g\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - \inf_{\varphi^2\in\Phi^2} g\left(y,\varphi^1,\varphi^2\right) \right| \leq Kd(x,y), \qquad \forall\, x,y \in X.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} g(x,y) &\leq \sup_{(\varphi^1,\varphi^2)\in\Phi} \left| g\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right) - g\left(y,\varphi^1,\varphi^2\right) \right| \\ &\leq Kd\left(x,y\right). \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se sigue que,

$$\begin{aligned} \left| h\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right] - h\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right] \right| &\leq Kd\left(F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right), F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\widetilde{\xi}\right)\right) \\ &\leq KL_*\rho\left(\xi,\widetilde{\xi}\right). \end{aligned}$$

Luego aplicando la definición de la métrica de Kantorovich (ver Definición 3.4.1), se puede ver que por (4.25)

$$\mathcal{Q} \leq \vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right), \tag{4.30}$$

donde ϑ es la constante de (4.26).
Comparando (4.14), (4.24) y (4.30) obtenemos que

$$\Delta^1(x) \leq 2\left(1 + \frac{b}{(1-\lambda)^2}\right)\left[\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right) + \left|J_* - \tilde{J}_*\right|\right]. \tag{4.31}$$

Parte IV: Cotas para $\left|J_* - \tilde{J}_*\right|$.

Ahora lo siguiente es acotar $\left|J_* - \tilde{J}_*\right|$ en términos de la distancia de Kantorovich.

Sea $\alpha \in (0,1)$ fijo. Recordando que la función de valor correspondiente al pago total descontado para los procesos (1.3) y (3.2) están definidas como sigue:

$$V_\alpha^* := \inf_{\pi^2\in\Pi^2} V_\alpha(x,\pi_*^1,\pi^2), \quad x \in X,$$

$$\widetilde{V}_\alpha^* := \inf_{\pi^2\in\Pi^2} \widetilde{V}_\alpha(x,\pi_*^1,\pi^2), \quad x \in X.$$

Para lo que resta, se basará en el enfoque del factor de descuento desvaneciente (ver Sección 2.2.1 y Observación 2.7).

En particular
$$\gamma_\alpha := \frac{1+\alpha}{2} = \alpha + \frac{1-\alpha}{2} \in (\alpha, 1),$$
y $z \in X$ tal que para algún $\varepsilon > 0$,
$$1 \leq W(z) \leq \inf_{x \in X} W(x) + \varepsilon,$$
es decir, $1 - \varepsilon < W(z) - \varepsilon \leq \inf_{x\in X} W(x)$.
Observe que de (2.7)
$$W_\alpha(x) = W(x) + e,$$
donde $e = \dfrac{2d\alpha}{1-\alpha}$. Además, $\dfrac{1}{1-\gamma_\alpha} = \dfrac{2}{1-\alpha}$.

De la Hipótesis 2.4(c), (d), Proposición 2.1 y (2.10), se sigue que:
$$\begin{aligned}\|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_{W_\alpha} &\leq \|T_\alpha V_\alpha^* - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^*\|_{W_\alpha} + \|\widetilde{T}_\alpha V_\alpha^* - \widetilde{T}_\alpha \widetilde{V}_\alpha^*\|_{W_\alpha} \\ &\leq \|T_\alpha V_\alpha^* - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^*\|_{W_\alpha} + \gamma_\alpha \|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_{W_\alpha}.\end{aligned}$$

De aquí,
$$\|V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^*\|_{W_\alpha} \leq (1-\gamma_\alpha)^{-1} \|T_\alpha V_\alpha^* - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^*\|_{W_\alpha}. \tag{4.32}$$

Además,
$$T_\alpha u(x) := \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_S u\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right\}, \quad x \in X,$$
y
$$\widetilde{T}_\alpha u(x) := \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) + \alpha \int_S u\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right\}, \quad x \in X.$$

Ahora, usando (4.32) se demostrará lo siguiente:
$$\left|V_\alpha^*(z) - \widetilde{V}_\alpha^*(z)\right| \leq \frac{2}{1-\alpha} \psi(\alpha) \mathcal{Q}_\alpha\left(G, \widetilde{G}\right), \tag{4.33}$$
donde
$$\psi(\alpha) \to 1 \quad \text{cuando} \quad \alpha \to 1, \tag{4.34}$$
y
$$\mathcal{Q}_\alpha\left(G, \widetilde{G}\right) := \sup_{(x,\varphi)} \left| \int_S V_\alpha^*\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S V_\alpha^*\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right|. \tag{4.35}$$

Observe que

$$\left| T_\alpha V_\alpha^*(x) - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^*(x) \right| \leq \alpha \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right), \quad x \in X. \tag{4.36}$$

De (4.36) y (4.32) se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left| V_\alpha^*(z) - \widetilde{V}_\alpha^*(z) \right| &\leq \left\| V_\alpha^* - \widetilde{V}_\alpha^* \right\|_{W_\alpha} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \left\| T_\alpha V_\alpha^* - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^* \right\|_{W_\alpha} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \sup_{x \in X} \frac{\left| T_\alpha V_\alpha^*(x) - \widetilde{T}_\alpha V_\alpha^*(x) \right|}{W_\alpha(x)} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \sup_{x \in X} \frac{\alpha \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right)}{W(x) + \dfrac{2\alpha d}{1-\alpha}} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \frac{\alpha \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right)}{\operatorname{ínf}_{x \in X} W(x) + \dfrac{2\alpha d}{1-\alpha}} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \frac{\alpha \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right)}{W(z) + \dfrac{2\alpha d}{1-\alpha} - \varepsilon} W_\alpha(z) \\
&\leq \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \frac{W_\alpha(z) + \dfrac{2\alpha d}{1-\alpha}}{W(z) + \dfrac{2\alpha d}{1-\alpha} - \varepsilon} \alpha \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right) \\
&= \frac{1}{1-\gamma_\alpha} \psi(\alpha) \mathcal{Q}_\alpha \left(G, \widetilde{G} \right),
\end{aligned}$$

donde

$$\psi(\alpha) = \frac{(1-\alpha) W(z) + 2\alpha d}{(1-\alpha) W(z) + 2\alpha d - \varepsilon(1-\alpha)} \alpha.$$

Observe que, cuando $\alpha \to 1$,

$$\psi(\alpha) \to \frac{2d}{2d} = 1.$$

Por otro lado, de la Observación 2.7, se puede elegir una sucesión $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ de tal manera que cuando $n \to \infty$:

$$\alpha_n \to 1;$$

$$(1-\alpha_n) V_{\alpha_n}^*(z) \to J_*; \tag{4.37}$$

$$(1-\alpha_n) \widetilde{V}_{\alpha_n}^*(z) \to \tilde{J}_*; \tag{4.38}$$

$$V_{\alpha_n}^*(x) - V_{\alpha_n}^*(z) \to h'(x), \quad x \in X, \tag{4.39}$$

para una cierta función $h' \in \mathbb{B}_W$ satisfaciendo la ecuación:

$$h'(x) = \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - J_* + \int_S h'\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right\}. \tag{4.40}$$

Ya que $h' \in \mathbb{B}_W$ y $\int_X W\, d\nu < \infty$, se obtiene que $\gamma := \int_X h'(x)\nu(dx)$ es un número finito. Usando (4.33)-(4.38) se establece que para cualquier entero N,

$$\begin{aligned} \left| J_* - \tilde{J}_* \right| &\leq 2 \limsup_{n\to\infty} \mathcal{Q}_{\alpha_n}\left(G, \widetilde{G}\right) \\ &\leq 2 \sup_{n \geq N} \sup_{(x,\varphi)} \left| \int_S h_{\alpha_n}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) - \int_S h_{\alpha_n}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \widetilde{\xi}\right)\right] \widetilde{G}\left(d\widetilde{\xi}\right) \right|, \end{aligned} \tag{4.41}$$

donde $h_{\alpha_n}(x) := V_{\alpha_n}^*(x) - V_{\alpha_n}^*(z) - \gamma$, $x \in X$.
Por (4.39), se tiene que, $h_{\alpha_n}(x) \to h'(x) - \gamma$, $x \in X$, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto la función $h := h' - \gamma$ es también una solución a la ecuación (4.40), y del Teorema 2.3 se cumple que $\int_X h(x)\nu(dx) = 0$. Entonces se deduce que $Th = h$, para el operador contractivo T definido en (4.18).
Por otro lado, ya que para cada α, $V_\alpha^* = T_\alpha V_\alpha^*$, se obtiene que para cada $n \in \mathbb{N}, x \in X$:

$$\begin{aligned} h_{\alpha_n}(x) &= \inf_{\varphi^2 \in \Phi^2} \sup_{\varphi^1 \in \Phi^1} \left\{ r\left(x, \varphi^1, \varphi^2\right) - \left(1 - \alpha_n\right) V_{\alpha_n}^*(z) + \alpha_n \int_S h_{\alpha_n}\left[F\left(x, \varphi^1, \varphi^2, \xi\right)\right] G\left(d\xi\right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(1 - \alpha_n\right)\gamma \right\}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

o

$$h_{\alpha_n}(x) = T'_{\alpha_n} h_{\alpha_n},$$

donde el operador $T'_{\alpha_n} : \mathbb{B}_W \to \mathbb{B}_W$ es definido por el lado derecho de (4.42). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|h - h_{\alpha_n}\|_W &= \|Th - T'_{\alpha_n} h_{\alpha_n}\|_W \\ &\leq \|Th - Th_{\alpha_n}\|_W + \|Th_{\alpha_n} - T'_{\alpha_n} h_{\alpha_n}\|_W \\ &\leq \lambda \|h - h_{\alpha_n}\|_W + \|Th_{\alpha_n} - T'_{\alpha_n} h_{\alpha_n}\|_W, \end{aligned}$$

lo que implica que,

$$\begin{aligned}
\|h - h_{\alpha_n}\|_W &\leq \frac{1}{1-\lambda}\|Th_{\alpha_n} - T'_{\alpha_n}h_{\alpha_n}\|_W \\
&\leq \frac{1}{1-\lambda}\sup_{x\in X}\frac{1}{W(x)}\Big\{\left|J_* - (1-\alpha_n)V^*_{\alpha_n}(z)\right| \\
&\quad + \sup_{\varphi\in\Phi}(1-\alpha_n)\left|\int_S h_{\alpha_n}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\xi\right)\right]G\left(d\xi\right)\right| \\
&\quad + (1-\alpha_n)\gamma + \sup_{\varphi\in\Phi}\phi\left(x,\varphi^1,\varphi^2\right)\int_X h_{\alpha_n}(x)\nu(dx)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

El primer sumando del lado derecho de (4.43) desaparece cuando $n\to\infty$ debido a (4.37). De la Observación 2.7 se sabe que existe una constante $\overline{K}$ tal que para toda $x\in X$,

$$\left|V^*_{\alpha_n}(x) - V^*_{\alpha_n}(z)\right| \leq \overline{K}W(x). \tag{4.44}$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad y la Hipótesis 2.4(b), (c) se concluye que el segundo y el tercer termino del lado derecho de (4.43) tiende a 0 cuando $n\to\infty$. También de (4.44), Hipótesis 2.4(d), el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y el hecho que $\displaystyle\int_X h\,d\nu = 0$, se obtiene que el último sumando en (4.43) converge a cero cuando $n\to\infty$. Por lo tanto, para cada $\varepsilon>0$ se puede escoger N tal que para $n\geq N$.

$$\|h_{\alpha_n}\|_W \leq \|h\|_W + \|h - h_{\alpha_n}\|_W \leq \overline{r} + \varepsilon \tag{4.45}$$

donde la constante $\overline{r}$ fue definido en (4.29).
Usando (4.45), ecuación (4.42), Hipótesis 4.1(a)-(c) y repitiendo los argumentos usados para establecer la propiedad Lipschitz de h en X, encontramos que para $n\geq N$ la función h_{α_n} es Lipschitz con la constante $L_1 + L(r+\varepsilon)$, y consecuentemente de la Hipótesis 4.1(d), para cada $n\geq N$, $(x,\varphi^1,\varphi^2)\in\mathbb{K}$, la función $h_{\alpha_n}\left[F\left(x,\varphi^1,\varphi^2,\cdot\right)\right]$ es Lipschitz en S con la constante $L_*\left(L_1 + L(r+\varepsilon)\right)$.

Por lo tanto, de (3.22) y (4.41) se obtiene que

$$\left|J_* - \tilde{J}_*\right| \leq 2L_*\left(L_1 + L(r+\varepsilon)\right)\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right),$$

dado que ε es arbitrario, se puede concluir

$$\left|J_* - \tilde{J}_*\right| \leq 2\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right), \tag{4.46}$$

donde ϑ es la constante en (4.26).

Finalmente, la demostración del Teorema se sigue juntando las desigualdades (4.31) y (4.46), con lo cual se obtiene la desigualdad de estabilidad deseada (4.6):

$$\begin{aligned}
\Delta^1(x) &\leq 2\left(1+\frac{d}{(1-\lambda)^2}\right)\left[\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right)+\left|J_*-\tilde{J}_*\right|\right] \\
&\leq 2\left(1+\frac{d}{(1-\lambda)^2}\right)\left[\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right)+2\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right)\right] \\
&= 2\left(1+\frac{d}{(1-\lambda)^2}\right)3\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right) \\
&= 6\left(1+\frac{d}{(1-\lambda)^2}\right)\vartheta\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right) \\
&= 6\left(1+\frac{d}{(1-\lambda)^2}\right)L_*\left[L_1+\frac{L}{1-\lambda}\,\text{máx}\left\{1,\frac{d}{1-\lambda}\right\}\right]\mathcal{K}\left(G,\widetilde{G}\right).
\end{aligned}$$

Análogamente se demuestra para el índice de estabilidad $\Delta^2(x)$. ■

Apéndice A

Resultados Auxiliares

A.1. Funciones Semicontinuas

A menos que se indique lo contrario, a continuación se supone que X es un espacio topológico, y se denota el conjunto de los números reales extendidos como $\bar{\mathbb{R}}$, i.e., $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición A.1. *Una función $v : X \to \bar{\mathbb{R}}$ se dice ser*

(a) semicontinua inferior (l.s.c.) si el conjunto $\{x \in X : v(x) \leq r\}$ es cerrado en X para cada $r \in \mathbb{R}$;

(b) semicontinua superior (u.s.c.) si el conjunto $\{x \in X : v(x) \geq r\}$ es cerrado en X para cada $r \in \mathbb{R}$.

claramente, una función v es l.s.c., sí y sólo sí, $-v$ es u.s.c., y v es continua si y solo si v es l.s.c. y u.s.c.

Los siguientes resultados resumen las principales propiedades de las funciones semicontinuas. Para sus demostraciones, véase por ejemplo [2, 4].

Proposición A.1. *Sea X un espacio métrico y $v : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Entonces:*

(a) v es l.s.c., sí y sólo sí, para cada sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x \in X$, cuando $n \to \infty$, tenemos $\liminf_{n\to\infty} v(x_n) \geq v(x)$.

(b) v es l.s.c. y acotado por debajo, sí y sólo sí, existe una sucesión $\{v_n\}$ de funciones acotadas y continuas tales que $v_n \nearrow v$.

Observación A.1. *Similarmente, v es u.s.c. sí y sólo sí para cada sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x \in X$, cuando $n \to \infty$, se tiene que $\limsup_{n\to\infty} v(x_n) \leq v(x)$. Además, v es u.s.c. y acotado por arriba si y solo si existe una sucesión $\{v_n\}$ de funciones continuas y acotadas $v_n \searrow v$.*

Proposición A.2. *Sea X un espacio métrico compacto.*

(a) Si $v : X \to \bar{\mathbb{R}}$ es l.s.c., entonces v alcanza su mínimo, i.e., existe $x_* \in X$ tal que $v(x_*) = \inf_{x\in X} v(x)$.

(b) Si $v : X \to \bar{\mathbb{R}}$ es u.s.c., entonces v alcanza su supremo, i.e., existe $x^* \in X$ tal que $v(x^*) = \sup_{x\in X} v(x)$.

Un espacio topológico X es un *espacio de Hausdorff* si para cada $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe una vecindad de U_x y V_y de x y y, respectivamente, tal que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Por ejemplo, todos los espacios métricos son de Hausdorff.

Teorema A.1 (Teorema Minimax de Fan)**.** *Sean X y Y dos espacios compactos de Hausdorff y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función de valores reales. Supongamos que:*

a) para cada $y \in Y$, $f(x, y)$ es u.s.c. en $x \in X$, y l.s.c. en $y \in Y$ para cada $x \in X$;

b) f es cóncavo en X y convexo en Y.

Entonces la siguiente igualdad se tiene:

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y).$$

Demostración. [6]. ∎

A.2. Multifunciones y Selectores

A lo largo de lo siguiente, X y Y son espacios de Borel. Un espacio de Borel siempre está dotado con una $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$, es decir, la $\sigma-$álgebra más pequeña de subconjuntos de X que contiene todos los conjuntos abiertos en X. En este sentido, "medible" ya sea para conjuntos o funciones, significa "Borel medible".

Definición A.2. *Una multifunción Ψ de X a Y es una función tal que $\Psi(x)$ es un subconjunto no vació de Y para todo $x \in X$.*

Una multifunción también se denomina correspondencia o mapeo de valores establecidos. Se usará la notación $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ para una multifunción Ψ de X a Y.

Una multifunción $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ se dice ser de valor compacto (respectivamente, de valor cerrado) si para cada $x \in X$, $\Psi(x)$ es un subconjunto compacto (respectivamente cerrado) de Y. Su gráfica es el subconjunto $Gr(\Psi) \subset X \times Y$ definido como

$$Gr(\Psi) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Psi(x)\}.$$

Si Y_0 es un subconjunto no vacio de Y, se define $\Psi^{-1}[Y_0] := \{x \in X : \Psi(x) \cap Y_0 \neq \emptyset\}$.

Definición A.3. *Sea $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ una multifunción. Se dice que:*

(a) Ψ es Borel medible si $\Psi^{-1}[G]$ es un subconjunto Borel de X para cada subconjunto abierto $G \subset Y$;

(b) Ψ es u.s.c. si $\Psi^{-1}[F]$ es cerrado en X para cada subconjunto cerrado $F \subset Y$;

(c) Ψ es l.s.c. si $\Psi^{-1}[G]$ es abierto en X para cada subconjunto abierto $G \subset Y$;

(d) Ψ es continua si es semicontinua superior e inferior.

Proposición A.3. *Sea $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ una multifunción de valor compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Ψ es Borel medible.

(b) $\Psi^{-1}[F]$ es un subconjunto Borel de X para cada subconjunto cerrado $F \subset Y$.

(c) $Gr(\Psi)$ *es un subconjunto Borel de* $X \times Y$.

(d) Ψ *es una función medible de* X *en el espacio del subconjunto compacto no vacío de* Y *respecto a la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Véase por ejemplo [13, 28]. ■

Definición A.4. *Sea* $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ *una multifunción Borel medible. Una función medible* $f : X \to Y$ *tal que* $f(x) \in \Psi(x)$, $x \in X$, *es llamada un selector medible para* Ψ.

Un selector medible para Ψ es también llamado *función decisión* para Ψ, y los resultados que indican su existencia se denominan *Teorema de selección medible.*

Teorema A.2. *Sea* $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ *una multifunción Borel medible de valores compactos y* $v : Gr(\Psi) \to \mathbb{R}$ *una función medible.*

(a) Si $v(x, \cdot)$ *es u.s.c. en* $\Psi(x)$ *para cada* $x \in X$, *entonces existe un selector medible* f^* *de* Ψ *tal que*

$$v(x, f^*(x)) = \max_{y \in \Psi(x)} v(x, y) =: v^*(x) \quad \forall x \in X,$$

y v^* *es medible.*

(b) Si $v(x, \cdot)$ *es l.s.c. en* $\Psi(x)$ *para cada* $x \in X$, *entonces existe un selector medible* f_* *de* Ψ *tal que*

$$v(x, f_*(x)) = \min_{y \in \Psi(x)} v(x, y) =: v_*(x) \quad \forall x \in X,$$

y v_* *es medible.*

Demostración. Véase por ejemplo [13, 28]. ■

Proposición A.4. *Sea* $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ *una multifunción Borel medible de valores compactos. Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de selectores medibles para* Ψ, *entonces existe un selector medible* f^* *para* Ψ *tal que* $f^*(x) \in \Psi(x)$ *es un punto de acumulación de* $\{f_n(x)\}$ *para cada* $x \in X$.

Demostración. Véase por ejemplo [28]. ■

Teorema A.3 (Teorema del máximo de Berge)**.** *Sea* $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$ *una multifunción continua de valores compactos entre espacios topológicos* X *y* Y*, y* $v : Gr(\Psi) \to \mathbb{R}$ *una función continua. Defina la multifunción* $\Psi^* : X \twoheadrightarrow Y$ *por*

$$\Psi^*(x) = \{y \in \Psi(x) : v(x,y) = v^*(x)\},$$

donde $v^*(x) = \text{máx}_{y \in \Psi(x)} v(x,y)$*. Entonces:*

a) v^* *es continua.*

b) Ψ^* *es una multifunción de valores compactos.*

c) Si v *tiene una extensión continua para* $X \times Y$ *o* Y *es de Hausdorff,* Ψ^* *es una multifunción u.s.c.*

Demostración. Véase [3, pp. 115-116], (también [1]). ■

Apéndice B

Medidas de probabilidad y convergencia débil

A lo largo de lo siguiente, X es un espacio de Borel con $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$.

Definición B.1. *Sean μ, μ_t, $t \in \mathbb{N}$, medidas de probabilidad en X. Se dice que:*

a) μ_t converge débilmente a μ, denotado como $\mu_t \xrightarrow{w} \mu$ si

$$\int v d\mu_t \to \int v d\mu,$$

para todo $v \in C(X)$.

b) μ_t converge fuertemente a μ, denotado como $\mu_t \xrightarrow{s} \mu$ si

$$\mu_t(B) \to \mu(B),$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Se denota por $\mathbb{P}(X)$ el espacio de todas las medidas de probabilidad en X. Se asume que $\mathbb{P}(X)$ está dotado de la topología de convergencia débil dada en la Definición B.1. En este caso, como X es un espacio de Borel, $\mathbb{P}(X)$ también es un espacio de Borel (véase por ejemplo, [15, p. 91], [4, Cor. 7.25.1]). Además, si X es compacto, entonces también lo es $\mathbb{P}(X)$ [26, Teorema 6.4].

Proposición B.1. *Para $\mu, \mu_t \in \mathbb{P}(X)$, $t \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mu_t \xrightarrow{w} \mu$.

(b) $\liminf\limits_{t\to\infty} \mu_t(D) \geq \mu(D)$ *para cada conjunto abierto* $D \subset X$ *y* $\mu_t(X) \to \mu(X)$.

(c) $\limsup\limits_{t\to\infty} \mu_t(D) \leq \mu(D)$ *para cada conjunto cerrado* $D \subset X$ *y* $\mu_t(X) \to \mu(X)$.

Demostración. [2]. ∎

Observación B.1. *De la Proposición A.1, es fácil probar que si* $\mu_t \xrightarrow{w} \mu$ *y* v *es l.s.c. y acotada por debajo entonces*

$$\liminf_{t\to\infty} \int v d\mu_t \geq \int v d\mu.$$

Similarmente, de la observación A.1, si $\mu_t \xrightarrow{w} \mu$ *y* v *es u.s.c. y acotada por arriba, entonces*

$$\limsup_{t\to\infty} \int v d\mu_t \leq \int v d\mu.$$

Para una función $u : X \to \mathbb{R}$, se define el mapeo $\tilde{u} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R}$ como $\tilde{u}(\mu) = \int u d\mu$.

Proposición B.2. *(a) Si* u *es l.s.c. y acotada por debajo entonces* $\tilde{u}$ *también es l.s.c. y acotada por debajo en* $\mathbb{P}(X)$*;*

(b) si u *es u.s.c. y acotada por arriba, entonces* $\tilde{u}$ *es u.s.c. y acotada por arriba en* $\mathbb{P}(X)$.

Demostración. [7, Lema 3.3]. ∎

Proposición B.3. *Para una multifunción* $\Psi : X \twoheadrightarrow Y$*, sea* $\bar{\Psi} : X \twoheadrightarrow \mathbb{P}(X)$ *la multifunción definida como* $\bar{\Psi}(x) := \mathbb{P}(\Psi(x))$*. Si* Ψ *es continua entonces también* $\bar{\Psi}$.

Demostración. [14, Teorema 3]. ∎

Apéndice C

Kerneles estocásticos

A lo largo de lo siguiente, X y Y son espacios de Borel.

Definición C.1. *Un kernel estocástico $\gamma(dx|y)$ en X dado Y es una función tal que $\gamma(\cdot|y) \in \mathbb{P}(X)$ para cada $y \in Y$ y $\gamma(D|\cdot) \in B(Y)$ para cada fijo $D \in \mathcal{B}(X)$.*

Se define por $\mathbb{P}(X|Y)$ la familia de kerneles estocásticos en X dado Y.

Definición C.2. *Sea $\gamma \in \mathbb{P}(X|Y)$. se dice que*

(a) γ es fuertemente continuo si la función

$$y \to \int v(x)\gamma(dx|y) \tag{C.1}$$

es acotada y continua para cada función $v \in B(X)$.

(b) γ es débilmente continuo si la función en (C.1) es acotada y continua para cada $v \in C(X)$.

El siguiente resultado establece algunas de las principales propiedades de los kerneles estocásticos.

Proposición C.1. *Sea $\gamma \in \mathbb{P}(X|Y)$.*

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a.1) γ *es fuertemente continuo.*

(a.2) La función en (C.1) es l.s.c. para cada $v \in B(X)$.

(a.3) $\gamma(D|\cdot)$ *es continua en* Y *para cada* $D \in \mathcal{B}(X)$.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(b.1) γ *es débilmente continuo.*

(b.2) La función en (C.1) es l.s.c. para cada función v *l.s.c. y acotada inferiormente.*

Demostración. [11, Apéndice C]. ∎

Proposición C.2 (Teorema de C. Ionescu Tulcea). *Sea* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ *una sucesión de espacios de Borel,* $Y_t := X_0 \times X_1 \times ... \times X_t$, $t \in \mathbb{N}_0$, *y* $Y := \prod_{t=0}^{\infty} X_t$. *En adición, sea* $\nu \in \mathbb{P}(X_0)$ *una medida de probabilidad arbitraria, y para* $t \in \mathbb{N}_0$, $\gamma_t \in \mathbb{P}\left(X_{t+1}|Y_t\right)$. *Entonces existe una única medida de probabilidad* P_ν *en* Y *tal que, para cada rectángulo medible* $D_0 \times D_1 \times ... \times D_t$ *en* Y_t

$$P_\nu\left(D_0 \times ... \times D_t\right) = \int\limits_{D_0} \nu(dx_0) \int\limits_{D_1} \gamma_0\left(dx_1|y_0\right) \int\limits_{D_2} \gamma_1\left(dx_2|y_1\right) ... \int\limits_{D_t} \gamma_{t-1}\left(dx_t|y_{t-1}\right),$$

donde $y_t = (x_0, x_1, ..., x_t) \in Y_t$.

Demostración. [4, pp. 140-141]. ∎

C.1. Procesos de ecuaciones en diferencias

Sea $\{x_t\}$ un proceso estocástico en X definido por

$$x_{t+1} = F(x_t, \xi_t), \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 \in X \text{ dado}, \tag{C.2}$$

donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toman valores en un espacio de Borel S, con una distribución común $\theta \in \mathbb{P}(S)$, e independiente del estado inicial x_0. Además $F : X \times S \to X$ es una función medible dada.

La ecuación (C.2), junto con la distribución θ, define un kernel estocástico $\gamma \in \mathbb{P}(X|X)$ por

$$\begin{aligned}
\gamma(D|x) \quad : \quad &= \Pr[x_{t+1} \in D | x_t = x] \\
&= \Pr[F(x,\xi_t) \in D | x_t = x] \\
&= \theta\{s \in S : F(x,s) \in D\} \\
&= \int_S 1_D [F(x,a)]\, \theta(ds), \quad D \in \mathcal{B}(X),\ x \in X. \qquad \text{(C.3)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier función medible v en X

$$E[v(x_{t+1})|x_t = x] = \int_X v(y)\gamma(dy|x) = \int_S v[F(x,a)]\,\theta(ds), \quad x \in X,$$

Siempre que las integrales existan.

En particular, si $S = \mathbb{R}^k$ y θ tiene una densidad ρ con respecto a la medida de Lebesgue, i.e., $\theta(D) = \int_D \rho(s)ds$ para todo $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, el kernel estocástico γ en (C.3) se convierte

$$\gamma(D|x) = \int_{\mathbb{R}^k} 1_D[F(x,a)]\,\rho(s)ds, \quad D \in \mathcal{B}(X),\ x \in X, \qquad \text{(C.4)}$$

y

$$\int_X v(y)\gamma(dy|x) = \int_{\mathbb{R}^k} v[F(x,a)]\,\rho(s)ds, \quad x \in X.$$

Proposición C.3. *Si la función $F(x,s)$ en (C.2) es continua en $x \in X$ para cada $s \in S$, entonces el kernel estocástico γ en (C.3) es débilmente continuo.*

Demostración. Véase por ejemplo C.7 en [11]. ∎

Proposición C.4. *Si asume que $X = S = \mathbb{R}^k$, $F(x,s) = G(x) + s$ para alguna función medible G, y θ tiene una densidad ρ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces el kernel estocástico γ en (C.3) (ver (C.4)) es fuertemente continuo.*

Demostración. Véase por ejemplo C.8 en [11]. ∎

Apéndice D

Métricas de probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo.

Definición D.1. *a) Decimos que los vectores aleatorios X y X' son equivalentes sí*

$$P(X = X') = 1.$$

b) Decimos que el par de vectores aleatorios (X, Y), (X', Y') son equivalentes sí

$$P(X = X', Y = Y') = 1.$$

Es claro que para dos vectores aleatorios equivalentes, como en la Definición D.1 (a), (b), $F_X = F_{X'}$ y $F_{X,Y} = F_{X',Y'}$, respectivamente. Donde F_X representa la distribución de la variable X y $F_{X,Y}$ la distribución conjunta de las variables X, Y.

Notación 2. *Denotaremos por $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al conjunto de todos los pares de vectores aleatorios equivalentes (X, Y), donde X y Y toman valores en $\mathbb{R}^m$ y por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las distribuciones conjuntas $F_{X,Y}$ de los pares en $\mathcal{X}$.*

Definición D.2. *a) Una función*

$$\mu : \mathcal{P} \to [0, \infty]$$

es llamada un pseudométrica de probabilidad si para cada (X, Y), (Y, Z), (X, Z) y (Z, Y) pertenecientes a $\mathcal{X}$, lo siguiente se tiene:

(i) Si $P(X, Y) = 1$ entonces $\mu(X, Y) = 0$.

(ii) Simetría. $\mu(X,Y) = \mu(Y,X)$.

(iii) Desigualdad del triángulo. $\mu(X,Y) \leq \mu(X,Z) + \mu(Z,Y)$.

b) Sí la igualdad $\mu(X,Y) = 0$ *implica*

$$P(X = Y) = 1,$$

μ *es llamada métrica de probabilidad.*

Ejemplos 1. *a) La métrica de la variación total:*

$$V(X,Y) \coloneqq 2 \sup_{B \in \mathcal{B}(X)} |P(X \in B) - P(Y \in B)| \equiv \sup_{B \in \mathcal{B}(X)} |F_X(B) - F_Y(B)|.$$

b) La métrica de Dudley:

$$d(X,Y) \coloneqq \sup_{g \in Lip_b} |Eg(X) - Eg(Y)|,$$

donde

$$Lip_b \coloneqq \{g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : \|g\|_{BL} \coloneqq \|g\|_\infty + \|g\|_L \leq 1\}$$

$$\|g\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |g(x)|,$$

y

$$\|g\|_L \coloneqq \sup \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} : x \neq y \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

c) La métrica de Kantorovich:

$$\mathcal{K}(X,Y) \coloneqq \int_{x \in \mathbb{R}^m} |F_X(x) - F_Y(x)| \, dx.$$

d) La métrica uniforme o de Kolmogorov:

$$\kappa(X,Y) \coloneqq \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |F_X(x) - F_Y(x)|.$$

Bibliografía

[1] Aliprantis, C. and Border, K. (1999). *Infinite Dimensional Analysis*. Springer. 58

[2] Ash, R. (1972). *Real Analysis and Probability*. Bibliographie-P. Academic Press. 54, 60

[3] Berge, C. (1963). *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-valued Functions, Vector Spaces and Convexity*. Macmillan. 58

[4] Bertsekas, D. and Shreve, S. (1978). *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. Mathematics in science and engineering. Academic Press. 54, 59, 62

[5] Chang, H. (2006). Perfect information two-person zero-sum markov games with imprecise transition probabilities. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2):335–351. 2

[6] Fan, K. (1953). Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(1):42–47. 55

[7] Gonzalez-Trejo, T., Hernandez-Lerma, O., and Hoyos-Reyes, L. (2002). Minimax control of discrete-time stochastic systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 41:1626–1659. 60

[8] Gordienko, E. and Hernández-Lerma, O. (1995). Average cost markov control processes with weighted norms: existence of canonical policies. *Applicationes Mathematicae*, 23(2):199–218. 21

[9] Gordienko, E., Lemus-Rodriguez, E., and Montes de Oca, R. (2009). Average cost markov control processes: Stability with respect to the kantorovich metric. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70:13–33. 2

[10] Gordienko, E., Lemus-Rodríguez, E., and Montes de Oca, R. (2008). Discounted cost optimality problem: stability with respect to weak metrics. *Mathematical Methods of Operations Research*, 68(1):77–96. 2

[11] Hernandez-Lerma, O. and Lasserre, J. (2012). *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer New York. 62, 63

[12] Hernández-Lerma, O. and Lasserre, J. (1999). *Further topics on discrete-time Markov control processes*. 10, 14

[13] Himmelberg, C., Parthasarathy, T., and Van Vleck, F. (1976). Optimal plans for dynamic programming problems. *Mathematics of Operations Research*, 1(4):390–394. 57

[14] Himmelberg, C. and Van Vleck, F. (1975). Multifunctions with values in a space of probability measures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 50(1):108–112. 60

[15] Hinderer, K. (1970). *Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter*, volume 33. Springer-Verlag, Berlin. 59

[16] Jáskiewicz, A. and Nowak, A. (2006). Zero-sum ergodic stochastic games with feller transition probabilities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(3):773–789. 2, 20, 21

[17] Kuënle, H. (2007). On markov games with average reward criterion and weakly continuous transition probabilities. *Siam Journal on Control and Optimization*, 45:2156–2168.

[18] Luque-Vásquez, F. (2002). Zero-sum semi-markov games in borel spaces: Discounted and average payoff. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 8(2):227–241.

[19] Luque-Vásquez, F. and Minjárez-Sosa, A. (2008). Two person zero-sum semi-markov games with unknown holding times distribution on one side: A discounted payoff criterion. *Applied Mathematics and Optimization*, 57(3):289–305. 2

[20] Luque-Vásquez, F. and Minjárez-Sosa, A. (2017). Empirical approximation in markov games under unbounded payoff: discounted and average criteria. *Kybernetika*, 53(4):694–716. 2

[21] Minjárez-Sosa, A. (2020). *Zero-Sum Discrete-Time Markov Games with Unknown Disturbance Distribution: Discounted and Average Criteria*. 14, 16, 19, 20

[22] Minjárez-Sosa, A. and Vega-Amaya, O. (2009). Asymptotically optimal strategies for adaptive zero-sum discounted markov games. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(3):1405–1421. 2, 14, 16, 19

[23] Minjárez-Sosa, A. and Vega-Amaya, O. (2013). Optimal strategies for adaptive zero-sum average markov games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402(1):44–56. 2, 20

[24] Neyman, A. and Sorin, S. (2003). *Stochastic Games and Applications*. NATO science series: Mathematical and physical sciences. Springer Netherlands. 2

[25] Nowak, A. (1985). Measurable selection theorems for minimax stochastic optimization problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(3):466–476. 14, 16

[26] Parthasarathy, K. (1967). *Probability Measures on Metric Spaces*. Probability and Mathematical Statistics - Academic Press. Academic Press. 59

[27] Rachev, S. and Rüschendorf, L. (2006). *Mass Transportation Problems: Applications*. Probability and Its Applications. Springer New York. 33

[28] Schäl, M. (1975). Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 32:179–196. 57

[29] Shapley, L. (1953). Stochastic games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(10):1095–1100. 2

[30] Van Nunen, J. and Wessels, J. (1978). A note on dynamic programming with unbounded rewards. *Management Science*, 24:576–580. 19

[31] Vega-Amaya, O. (2003). Zero-sum average semi-markov games: Fixed-point solutions of the shapley equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(5):1876–1894. 2, 21, 23